熱方程式と波動方程式を補間する 非線型積分微分方程式の初期値問題

平田　均 (上智大学),　Miao Changxing(北京　応用物理計算機数学研究所)

2000/6/24

I を 0 を含む $[0,\infty)$ の区間とする。$(x,t)\in\mathbf{R}^n\times I$ 上の実函数 u についての、パラメータ $0<\alpha<1$ を含んだ次の非線型の積分微分方程式を考える。

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\partial u(t)}{\partial t} &= \displaystyle\int_0^t R_\alpha(t-s)\Delta u(s)ds+\int_0^t R_\alpha(t-s)f(u(s))ds,\\ u(0) &= \varphi.\end{cases}$$

ここで $u(t)=u(x,t)$ であり、$\varphi=\varphi(x)$ は初期値函数である。また、$R_\alpha(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ であり、非線型項 f は $f(0)=0$ である $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ の C^1 級函数で、ある $\sigma>0$ に対して $|f'(u)|\le C(1+|u|^\sigma)$ を満たしているとする。

この方程式は形式的には

$$\frac{\partial^{1+\alpha}u}{\partial t^{1+\alpha}}=\Delta u+f(u),\quad u(0)=\varphi,$$

と書け、非線型熱方程式と波動方程式を補間する方程式である。空間 1 次元で線形の場合、上の方程式は履歴のある熱伝導現象を記述しており、多くの研究がなされている。(参考文献 1,2,4,7,8). Schneider-Wyss と藤田は、1 次元線形の場合の基本解を構成し、その性質を調べている。しかしこれまで、このタイプの方程式の非線型問題についてはほとんど研究がされてこなかった。ここでの目的は、空間次元を一般として上の非線型方程式の初期値問題が解けるパラメータ α と σ の条件を求め、さらにその解の性質を調べる事である。

主定理を述べる前に、解を構成する函数空間の指数と α, 空間次元 n の関係を示す次の定義を置く。

定義 1 指数の三つ組み (p,q,r) が

$$\frac{1}{q}=\frac{n(1+\alpha)}{2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\Big),\quad 1<r\le p<\begin{cases}\frac{n(1+\alpha)r}{n(1+\alpha)-2}, & n\ge 2\text{ のとき},\\ \infty, & n=1\text{ のとき},\end{cases}$$

を満たすとき、(p,q,r) を *"admissible triplet"* という。

このとき、我々の主定理は次の通りである。

定理 2 $r_0=\frac{n(1+\alpha)(1+\sigma)}{2}$ とする。$\varphi\in L^r(\mathbf{R}^n)$, ただし $r_0>1$ のとき $r\ge r_0$, $r_0\le 1$ のとき $r>1$ と仮定する。このとき、解の極大存在時間 $T^*>0$ と方程式 *(1)* を満たす函数 u が存在して、以下を満たす。

(a) 任意の $p \geq r$ と $t \in (0, T^*)$ に対して $t^{\frac{1}{q}} u(t) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ であり、$t^{\frac{1}{q}} u(t)$ は t について L^p-値の連続函数である。特に、$u \in C((0, T^*); L^r \cap L^\infty)$ である。

(b) 解 u は $C((0, T^*); L^r)$ で一意である。

(c) 任意の $p > r$ に対し、u は

$$t^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|_p \to 0, \quad as \quad t \to 0$$

を満たす。ここで q は、(p, q, r) が *admissible triplet* を成すように決める。

(d) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u \in L^q(0, T^* - \varepsilon); L^p)$ である。

(e) もし $T^* < \infty$ なら、任意の $p \geq r$ に対して

$$\lim_{t \to T^*} \|u(t)\|_p = \infty, \quad r \leq p \leq \infty$$

である。その上、

$$\|u(t)\|_p \geq C(T^* - t)^{(1+\alpha)\left(\frac{n}{2p} - \frac{1}{\sigma}\right)}$$

が成り立つ。

証明の方針

線形の非斉次積分微分方程式

$$(2) \begin{cases} \dfrac{\partial u(t)}{\partial t} & = \displaystyle\int_0^t R_\alpha(t-s) \Delta u(s) ds + \int_0^t R_\alpha(t-s) f(\cdot, s) ds, \\ u(0) & = \varphi. \end{cases}$$

の解は、Mittag-Leffler 函数 $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ を用いて次のように表示される。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\tilde{E}_{1+\alpha} * \varphi)(x,t) + \left(\int_0^t \tilde{E}_{1+\alpha}(\cdot, t-s) * \int_0^s R_\alpha(s-\tau) f(\cdot, \tau) d\tau ds \right)(x) \\ &= (\tilde{E}_{1+\alpha} * \varphi)(x,t) + \int_0^t (t-\tau)^\alpha (\tilde{E}_{1+\alpha,1+\alpha}(\cdot, t-\tau) * f(\cdot, \tau))(x) d\tau. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1+\alpha}(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(E_{1+\alpha}(-|\cdot|^2 t^{1+\alpha}))(x) &= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^n \textstyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} E_{1+\alpha}(-|\xi|^2 t^{1+\alpha}) d\xi, \\ \tilde{E}_{1+\alpha,1+\alpha}(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(E_{1+\alpha,1+\alpha}(-|\cdot|^2 t^{1+\alpha}))(x) &= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^n \textstyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} E_{1+\alpha,1+\alpha}(-|\xi|^2 t^{1+\alpha}) d\xi \end{aligned}$$

である。Mihlin-Hörmander の定理 ([6]) によって、任意の $1 < p < \infty$ と $0 < \alpha < 1$ に対して、$E_{1+\alpha}(-|\cdot|^2)$ は Hörmander 空間 ([5]) $\mathcal{M}_p = \mathcal{F}\{T \in S' | \forall u \in S, \|T * u\|_p \leq C\|u\|_p\}$ に属する事が判る。この事実から、つぎの L^p-L^r 評価式が成り立つ。

補題 3 $1 < p < \infty$, $n/2 < r \le p$ なる p, r を決める。このとき t と φ によらない定数 $C > 0$ があって、任意の $\varphi \in L^p(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$\|\tilde{E}_{1+\alpha}(\cdot,t) * \varphi\|_p \le C\|\varphi\|_p$$

が成り立つ。また、任意の $\varphi \in L^r(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$\|\tilde{E}_{1+\alpha}(\cdot,t) * \varphi\|_p \le Ct^{-\frac{n(1+\alpha)}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\|\varphi\|_r$$

この補題から儀我 [3] と同様にして、積分微分方程式の線形部分に対する次の時空評価式を得る。

補題 4 (p,q,r) を $r > n/2$ であるような任意の *admissible triplet* とする。このとき、任意の $\varphi \in L^r(\mathbf{R}^n)$ に対し、$\tilde{E}_{1+\alpha} * \varphi \in C_b(I;L^r) \cap L^q(I;L^p)$ で、

$$\|\tilde{E}_{1+\alpha} * \varphi\|_{L^q(I;L^p)} \le C\|\varphi\|_r$$

が成り立つ。ここで $I = [0,T)$ または $I = [0,\infty)$ で、C は φ と I によらない定数である。

非斉次項については、次の時空評価式を得る。

補題 5

$$\begin{aligned} Gf &= \int_0^t \Big(\tilde{E}_{1+\alpha}(\cdot,t-s) * \int_0^s R_\alpha(s-\tau)f(\cdot,\tau)\Big)(x)\,d\tau\,ds \\ &= (\tilde{E}_{1+\alpha} * \varphi)(x,t) + \int_0^t (t-\tau)^\alpha(\tilde{E}_{1+\alpha,1+\alpha}(\cdot,t-\tau) * f(\cdot,\tau))(x)\,d\tau \end{aligned}$$

と置く。

(i) (p,q,r) を任意の *admissible triplet* で σ が

$$\max(n(1+\sigma), n(1+\alpha)\sigma) < 2p \qquad n\sigma < 2r,$$

を満たしている時、任意の $f \in L^{\frac{q}{1+\sigma}}(0,T;L^{\frac{p}{1+\sigma}})$ に対し、$Gf \in L^q(0,T;L^p)$ で、

$$\|Gf\|_{L^q(0,T;L^p)} \le CT^{(1+\alpha)(1-\frac{n\sigma}{2r})}\|f\|_{L^{\frac{q}{1+\sigma}}\left(0,T;L^{\frac{p}{1+\sigma}}\right)},$$

が成り立つ。ここで C は f と T によらない定数である。

(ii) (p_1,q_1,r) を任意の *admissible triplet* で、σ が

$$2r(1+\sigma) > n\sigma(1+\alpha), \quad n\sigma < 2r, \quad \frac{\sigma}{r(1+\sigma)} + \frac{1}{p_1} < \frac{2}{n}.$$

を満たしている時、(p,q,r) が *admissible triplet* をなすような p, q がとれて任意の $f \in L^{\frac{q}{1+\sigma}}(0,T;L^{\frac{p}{1+\sigma}})$, に対して

$$\|Gf\|_{L^{q_1}(0,T;L^{p_1})} \le CT^{1+\alpha-\frac{n(1+\alpha)\sigma}{2r}}\|f\|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}_{L^{\frac{q}{1+\sigma}}\left(0,T;L^{\frac{p}{1+\sigma}}\right)}\||f|^{\frac{1}{1+\sigma}}\|_{L^{q_1}(0,T;L^{p_1})}.$$

が成り立つ。

そこで、定理の仮定にある r に対して、p, q を (p,q,r) が admissible triplet をなすように適当に決める。函数空間

$$\begin{aligned} X_{p,q}(0,T) &= \{u \in C((0,T];L^p) \mid \|u\|_{X_{p,q}(0,T)} = \sup_{0<t\le T} t^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|_p < \infty\}, \\ Y_{p,q}(0,T) &= L^q(0,T;L^p) \end{aligned}$$

を考え、これらの空間で縮小写像の原理を適用すれば、(1) の時間局所解が構成できる。また、(c) 及び爆発解に対する爆発のレートの評価式 (e) は、儀我 [3] の方法で得られる。

参考文献

1. Fujita Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. Osaka J. Math. **27** (1990) p. 309–321

2. Fujita Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation II. Osaka J. Math. **27** (1990) p. 797–804

3. Giga Y. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. Diff. Equ. **62** (1986) p. 186–212

4. Gurtin M.E. and Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Arch. Rat. Mech. Anal. **31** (1968) p. 113–126

5. Hörmander L. Estimates for translation invariant operator in L^p space. Acta. Math.**104** (1960) p. 93–139

6. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators I Springer-Verlag, (1983)

7. Miller R.K. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory. J. Math. Anal. Appl. **66** (1978) p. 313–332

8. Schneider W.R. & Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. J. Math. Phys. **30** (1989) p. 134–144