On smoothing properties of Nonlinear Schrödinger Equations

中村能久（Yoshihisa Nakamura）
熊本大学大学院自然科学研究科

本講演では、冪乗型の非線形項を持つ非線形 Schrödinger 方程式の、初期値が高い微分可能性を持つ場合の初期値問題における局所解の local regularity を評価し、非線形 Schrödinger 方程式に起こる smoothing effects について考察する。

考える方程式は次の非線形 Schrödinger 方程式である。

$$i\partial_t u = -\Delta u + F(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ここで、非線形項 $F(u) = |u|^{p-1}u$, $1 < p < \infty$, または $F(u) = (W * |u|^2)u$, $W \in L^q$, $1 < q < \infty$ である。

Kato [3] において、初期値が H^s, $s \geq 0$ に属する場合、s に依存する冪乗型の増大度を持つ非線形項、特に $F(u) = |u|^{p-1}u$ である方程式 (1) の local wellposedness が証明された。また、Hartree 型の非線形項 $F(u) = (W * |u|^2)u$ をもつ方程式 (1) の local wellposedness もよく知られている。(例えば、Hirata [2] 参照。) これらの解の regularity を評価することにより、次の定理が得られた。

定理 1. $s \geq 0$ とする。また $F(u) = |u|^{p-1}u$ で、$s < n/2$ ならば、$\{s\} \leq p \leq 1 + 4/(n-2s)$ を仮定する。ただし $\{s\}$ は、$s \notin \mathbb{Z}$ ならば $\{s\} = [s]+1$, $s \in \mathbb{N}$ ならば $\{s\} = s$, $\{0\} = 1$ とする。この時、$u(0) = u_0 \in H^s$ なる方程式 (1) の解 $u \in C(I; H^s)$, $I = [0,T]$, T は十分小、は次を満たす。

(i) $s > 1$ ならば、$\varphi u \in L^2(I; H^{s+1/2})$ である。ここで、$\varphi(x) = (1+|x|^2)^{-1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

(ii) $0 \leq s \leq 1$ ならば、$1 \leq n \leq 2s+4$ の時に、$\varphi u \in L^2(I; H^{s+1/2})$ を満たす。$n > 2s+4$ の時は、さらに $p < 1 + 2/(n-2s-2)$ という仮定の下で、$\varphi u \in L^2(I; H^{s+1/2})$ を満たす。

定理 2. $s \geq 0$ とする。また $F(u) = (W * |u|^2)u$, $W \in L^q$ で $q > n/(2s+3)$ かつ $q \geq 1$ を仮定する。この時、$u(0) = u_0 \in H^s$ なる方程式

(1) の解 $u \in C(I; H^s)$, $I = [0, T]$, T は十分小、は $\varphi u \in L^2(I; H^{s+1/2})$ を満たす。

定理１.の証明 $u = \Gamma u_0 - iGF(u)$ より、$\varphi u = \varphi \Gamma u_0 - i\varphi GF(u)$ を評価する。ここで、$\Gamma\phi(t) = e^{it\Delta}\phi$, $Gf(t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds$. 自由 Schrödinger 作用素のもつ smoothing effects により

$$\|\varphi \Gamma u_0\|_{L^2(I;H^{s+1/2})} \le C_I \|u_0\|_{H^s}, \tag{2}$$

(例えば、[7],[6] を参照。) また、双対性により、

$$\|\varphi GF(u)\|_{L^2(I;H^{s+1/2})} \le C_I \|F(u)\|_{L^1(I;H^s)}. \tag{3}$$

右辺のノルムが収束することは、Sobolev の埋蔵定理により、自明である（Nakamura [4, 5], Sjölin [8] 参照）。

定理２.の証明も同様である。

次に、非斉次項に対する smoothing pproperty を考察する。これに関連して、次の評価が得られた。

命題３. $|a(t,s)| \le 1$ を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の可測関数 $a(t,s)$ に対し、$G_a f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,s) e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds$ を定義する。$\mathcal{F}_{t,s} a \in L^1(\mathbb{R}^2)$（$\mathcal{F}_{t,s}$ は t, s に関する Fourier 変換。）ならば、

$$\|\varphi G_a f\|_{L^2(I;H^{1/2})} \le C_I \|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R};L^{p'}(\mathbb{R}^n))},$$

が成り立つ。ここで、(p', r') は $1/p' + 2/nr' = 1/2 + 2/n$ かつ $1/2 \le 1/p' < 1/2 + 2/n$ を満たす。（the admissible pair の共役指数。）

注意. もし、

$$a(t,s) = \begin{cases} 1, & 0 \le s \le t \le T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

ならば、$G = G_a$ である。しかしこの場合は、$\mathcal{F}_{t,s} a \notin L^1$ である。

証明は、双対評価において、the Fourier restriction theorem と Stricharz 評価を組み合わせる。(Constantin and Saut [1] 参照。)

参考文献

[1] P. Constantin and J. C. Saut, Local smoothing properties of dispersive equations, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 413-439.

[2] H. Hirata, The Cauchy problem for Hartree type Schrödinger equation in weighted Sobolev space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA,Math. 38 (1991), 567-588.

[3] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations II. H^s-solutions and unconditional well-posedness, J. d'Analyse Math. 67 (1995), 353-367.

[4] Y. Nakamura, Regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations with H^2 initial data, Yokohama Math. J., 47 (1999), 59-73.

[5] Y. Nakamura, Local solvability and smoothing effects of nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields, Funkcial. Ekvac., 44 (2001), to appear.

[6] P. Sjögren and P. Sjölin, Local regularity of solutions to time-dependent Schrödinger equations with smooth potentials, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 16 (1991), 3-12.

[7] P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equations, Duke Math. J. 55 (1987), 699-715.

[8] P. Sjölin, Regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ark. mat. 28 (1990), 145-157.

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
KUMAMOTO UNIVERSITY
2-39-1, KUROKAMI, KUMAMOTO 860-8555
JAPAN

E-mail address : hisa@math.sci.kumamoto-u.ac.jp