Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with linear potentials

太田 雅人 (Masahito OHTA) 静岡大学工学部
Email : tsmoota@eng.shizuoka.ac.jp

ポテンシャル $V(x)$ を含む非線形シュレディンガー方程式

$$iu_t = -\Delta u + V(x)u - |u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{1}$$

の standing wave 解 $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性について考える．この講演では常に $1 < p < \infty \ \ (n=1,2),\ \ 1 < p < 1+4/(n-2)\ \ (n \geq 3)$ を仮定する．また $\omega \in \mathbb{R}$ とし $\phi_\omega(x)$ は

$$-\Delta\phi + \omega\phi + V(x)\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

の基底状態とする．[5] における数値計算結果などから "一般的な" ポテンシャル $V(x)$ に対して次の２つの主張はもっともらしく思われる．
(主張１) "$-\Delta + V(x)$ が最小固有値 λ_1 をもつとき任意の p に対して ω が $\omega > -\lambda_1$ で $-\lambda_1$ に十分近ければ $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であろう."
(主張２) "$p > 1 + 4/n$ のとき ω が十分大きければ $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は不安定であろう."

主張１については [5] において分岐理論を用いて議論されている ([2] も参照)．この講演では主張２に関して福泉麗佳氏 (東北大・理) との共同研究の中間報告をしたい．結果を大雑把に述べると $V(x)$ は下に有界で，ある程度滑らかで，$V(x) = o(|x-a|^{-2})$ as $x \to a$, $V(x) = O(|x|^2)$ as $|x| \to \infty$ であれば主張２はほぼ正しい．結果を正確に述べる前に $V(x) \equiv 0$ のときの結果と比較する．$\omega > 0$ に対して

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \omega\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3}$$

の正値球対称解 $\psi_\omega(x)$ は一意的に存在し (1) with $V(x) \equiv 0$ の standing wave 解 $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ は $p < 1 + 4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して安定で，$p \geq 1 + 4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して不安定である (例えば [1, 3] 及び それらの References を参照)．

$-\Delta + V(x)$ が固有値を持つとき $p \geq 1 + 4/n$ であっても安定な standing wave 解が存在することに注意する (主張１ [5, 2] 参照)．また [5] における数値計算結果などから $p = 1 + 4/n$ のときは主張２は一般には成り立たないと思われる．

ポテンシャル $V(x)$ に対する仮定や記号などを用意してから結果を述べる．

(H0) There exist real valued functions $V_1(x)$ and $V_2(x)$ such that $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$.
(H1.0) $V_1(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $V_1(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$, $\partial^\alpha V_1(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for $|\alpha| \geq 2$.
(H1.1) There exists $C > 0$ such that $|x \cdot \nabla V_1(x)| \leq C(|x|^2 + V_1(x))$ in $\mathbb{R}^n$.
(H2.0) $V_2(x) \in L^{q_0}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for some $q_0 \geq 1$, $q_0 > n/2$.
(H2.1) $x \cdot \nabla V_2(x) \in L^{q_1}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for some $q_1 \geq 1$, $q_1 > n/2$.
(H2.2) $\displaystyle\sum_{j,k=1}^n x_j x_k \partial_j \partial_k V_2(x) \in L^{q_2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for some $q_2 \geq 1$, $q_2 > n/2$.
(H3) There exists $\gamma \in \mathbb{R}$ such that $V(x) \geq \gamma$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.
(H4) $V(x)$ is radially symmetric about $x = 0$.

以下では次の記号を用いる.

$$
\begin{aligned}
&X := \{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : V_1(x)|v(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)\},\\
&E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V(x)|v(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1},\\
&S_\omega(v) := E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_2^2,\\
&P(v) := \|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla V(x)|v(x)|^2 dx - \frac{n(p-1)}{2(p+1)}\|v\|_{p+1}^{p+1},\\
&I_\omega(v) := \|\nabla v\|_2^2 + \omega\|v\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|v(x)|^2 dx - \|v\|_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

このとき [1] の Theorem 9.2.5 と Remark 9.2.9 より次の Proposition が成り立つ.

Proposition 0. Assume (H0), (H1.0) and (H2.0). For any $u_0 \in X$, there exist $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ and a unique solution $u(t) \in C([-T,T], X) \cap C^1([-T,T], X')$ of (1) with $u(0) = u_0$. Moreover, we have

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2, \quad t \in [-T,T].$$

In addition, if we assume (H1.1), (H2.1) and that $u_0 \in X$ satisfies $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, then we have

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_2^2 = 8P(u(t)), \quad t \in [-T,T].$$

Definition 1. We say that a standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (1) is *stable* if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ with the following property: If $u_0 \in X$ satisfies

$$\inf\{\|u_0 - e^{i\theta}\phi_\omega\|_X : \theta \in \mathbb{R}\} < \delta,$$

then the solution $u(t)$ of (1) with $u(0) = u_0$ exists for all $t \in \mathbb{R}$ and satisfies

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf\{\|u(t) - e^{i\theta}\phi_\omega\|_X : \theta \in \mathbb{R}\} < \varepsilon.$$

Otherwise, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ is said to be *unstable*.

Definition 2. We say that $\phi_\omega(x)$ is a ground state of (2) if $\phi_\omega(x)$ is a minimizer of

$$\inf\{S_\omega(v):\ v \in X \setminus \{0\},\ I_\omega(v) = 0\}. \tag{4}$$

In case of (H4), we say that $\phi_\omega(x)$ is a radial ground state of (2) if $\phi_\omega(x)$ is a minimizer of

$$\inf\{S_\omega(v):\ v \in X_{rad} \setminus \{0\},\ I_\omega(v) = 0\}.$$

今回 次の 2 つの定理を得た.

Theorem 1. Suppose that $V_1(x) \equiv 0$ on $\mathbb{R}^n$, and assume (H0), (H2), (H3) and $p > 1+4/n$. Let $\phi_\omega(x)$ be a ground state of (2). Then there exists $\omega_* = \omega_*(n,p) \in (0,\infty)$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (1) is unstable for any $\omega \in (\omega_*, \infty)$.

Theorem 2. Suppose $n \geq 2$, $p > 1 + 4/n$ and (H0)–(H4). Let $\phi_\omega(x)$ be a *radial* ground state of (2). Then there exists $\omega_* = \omega_*(n,p) \in (0,\infty)$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (1) is unstable for any $\omega \in (\omega_*, \infty)$.

[3] にまとめられている一般論によれば $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性・不安定性を知るには ω の関数 $\|\phi_\omega\|_2^2$ の増減を調べればよい. $V(x) \equiv 0$ の場合はスケール則 $\psi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$ が成り立つのでこの増減を調べるのは簡単であるが, 一般には難しい. そこで Theorems 1 and 2 の証明には次の不安定性判定条件を用いる ([4] を参照).

Proposition 1. Assume (H0)–(H3). Let $\phi_\omega(x)$ be a ground state of (2). If $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)\big|_{\lambda=1} < 0$, then the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega$ is unstable. Here, we put $v^\lambda(x) := \lambda^{n/2}v(\lambda x)$ for $\lambda > 0$.

$P(\phi_\omega) = 0$ を用いて計算すると $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)\big|_{\lambda=1} < 0$ は

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ 3x \cdot \nabla V(x) + \sum_{j,k=1}^n x_j x_k \partial_j \partial_k V(x) \right\} |\phi_\omega(x)|^2 dx}{\|\phi_\omega\|_{p+1}^{p+1}} < \frac{n(p-1)\{n(p-1)-4\}}{2(p+1)} \tag{5}$$

と同値であることが分かる. 基底状態 $\phi_\omega(x)$ の変分的特徴付けを用いて $V(x) \equiv 0$ の場合の基底状態 $\psi_\omega(x)$ と様々なノルムを比較することにより (5) の左辺が $\omega \to \infty$ のとき 0 に収束することを示す.

今後の課題としては Theorem 2 において球対称性を取り除くことを考えている.

References

[1] T. Cazenave, "An introduction to nonlinear Schrödinger equations," Textos de Métods Matemáticos 26, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1993.

[2] R. Fukuizumi, Stability and instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential, Preprint.

[3] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[4] M. Ohta, Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.

[5] H. A. Rose and M. I. Weinstein, On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, Phyica D **30** (1988) 207–218.