Global existence for a class of cubic nonlinear Schrödinger equations with the slow-decaying initial data

東北大学理学研究科数学専攻研究生　利根川 聡

次の非線形シュレディンガー方程式を考える。

$$(1)\qquad \begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} = F(u, \bar{u}, u_x, \bar{u}_x), & (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

ここで $u = u(t,x)$ は複素数値関数、F は滑らかな関数で、ある整数 $p \geq 2$ に対して

$$F(u, \bar{u}, q, \bar{q}) = O(|u|^p + |q|^p)$$

を原点の近傍で満たすものとする。ここでの目標は、初期値問題 (1) が漸近自由な時間大域解をもつような非線形項 F を見つけることである。

初期値問題 (1) の時間局所解の存在については、すでに多くの研究で明らかにされている (例えば [5],[7])。また、非線形項の次数 p が高いとき ($p \geq 4$) の時間大域解の存在および解の漸近挙動については早くから結果が知られている [8],[12])。一方、p が小さいとき ($p = 2, 3$) の時間大域解の存在および解の漸近挙動については、長い間、個々の非線形項ごとに研究が行なわれてきた ([2],[3],[6],[10],[11] など)。３次の非線形項について言えば、ゲージ不変性の条件

$$F(e^{i\theta}u, \overline{e^{i\theta}u}, e^{i\theta}q, \overline{e^{i\theta}q}) = e^{i\theta}F(u, \bar{u}, q, \bar{q}), \quad \theta \in \mathbf{R}$$

を満たす F を伴った方程式の研究が中心で、ゲージ不変でない非線形項をもつ方程式については研究が進んでいなかった。最近になって、ゲージ不変でない非線形項をもつ方程式の解の大域存在と漸近挙動が明らかにされた ([4],[9])。

我々の結果を述べるために、いくつかの記号を準備する。$1 \leq p \leq \infty$ および非負整数 m に対して $L^p, W^{m,p}$ で標準的な Lebesgue 空間、Sobolev 空間を表す。また、$H^m = W^{m,2}$ とする。$C(I;B), C^1(I;B)$ はそれぞれ、区間 I からバナッハ空間 B への連続関数全体、連続微分可能な関数の全体を表す。実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す。関数 f に対して $\mathcal{F}f$ は f のフーリエ変換

$$[\mathcal{F}f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

を表す。$U(t) = e^{\frac{it}{2}\partial_x^2}$ で斉次線形シュレディンガー方程式の発展作用素を表す。

我々の結果を以下に述べる。

定理１ m を１以上の整数とし、$F = cuu_x^2$ (c は複素定数) とする。$\varphi(u)$ を

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c)^k}{(2k+1)k!}u^{2k+1} \ \left(= \int_0^u e^{-cz^2}dz\right)$$

で定義する。このとき、$u_0 \in H^m$ かつ $||\mathcal{F}\varphi(u_0)||_{L^1}$ が十分小さいならば初期値問題 (1) はただ１つの解 $u \in C(\mathbf{R}; H^m) \cap C^1(\mathbf{R}; H^{m-2})$ をもつ。さらに、解 u は $u(t) = \varphi^{-1}\Big(U(t)\varphi(u_0)\Big)$ で与えられる。以上の仮定に加え $u_0 \in L^1$ ならば、ただ１つの $\phi \in H^m$ が存在して

$$||u(t)||_{L^\infty} = O(|t|^{-\frac{1}{2}}), \quad ||u(t) - U(t)\phi||_{H^m} = O(|t|^{-1}) \quad (t \to \pm\infty)$$

が成立する。さらに、この ϕ は $\phi = \varphi(u_0)$ で与えられる。

定理２　m を 4 以上の整数とし、$F = c\bar{u}\bar{u}_x^2$ (c は複素定数) とする。このとき、$u_0 \in H^m \cap W^{[(m+5)/2],1}$ かつ $||u_0||_{H^m}, ||u_0||_{W^{[(m+5)/2],1}}$ が十分小さいならば初期値問題 (1) はただ１つの解 $u \in C(\mathbf{R}; H^m) \cap C^1(\mathbf{R}; H^{m-2})$ をもつ。さらに、ある $\phi_+, \phi_- \in H^m$ がそれぞれ１つずつ存在し、

$$||u(t)||_{W^{[(m+1)/2],\infty}} = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (t \to \pm\infty),$$

$$||u(t) - U(t)\phi_+||_{H^m} = O(|t|^{-1}) \quad (t \to \infty),$$

$$||u(t) - U(t)\phi_-||_{H^m} = O(|t|^{-1}) \quad (t \to -\infty)$$

が成立する。

注意

(1)　u が、非線形項 $F = cuu_x^2$ を伴った非線形シュレディンガー方程式の初期値問題 (1) の解であるとき、$\varphi(u)$(φ は定理１で与えられた関数) は $\varphi(u)|_{t=0} = \varphi(u_0)$ を満たす斉次線形シュレディンガー方程式の解となる。線形シュレディンガー方程式の解は時間大域的に存在するので、あとは φ^{-1} によって線形解から元の非線形方程式の解を復元することができるように適当な条件を与えてやればよい。その条件が「$||\mathcal{F}\varphi(u_0)||_{L^1}$ が十分小さい」である。

(2)　定理２の証明は、Shatah[13] が非線形クライン・ゴルドン方程式の研究で導入した標準形 normal form の方法および Coifman-Meyer[1] による Fourier multiplier に関する評価式に大きく依っている。

(3)　最近 Naumkin[9] は、非常に広いクラスの非線形項に対し非線形シュレディンガー方程式の解の大域存在および漸近挙動を証明した。上記の定理１・２に現れる非線形項は、どちらも [9] で扱われた非線形項のクラスに属している。ただし、初期値に関する仮定が異なるため、今回の我々の結果は [9] の結果には含まれない。

References

[1] R.Coifman and Y.Meyer, *Non-linear harmonic analysis, operator theory and P.D.E.*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Princeton University Press (1986).

[2] N.Hayashi and P.I.Naumkin, *Asymptotic behavior in time of solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **68** (1998), 159-177.

[3] N.Hayashi and P.I.Naumkin, *Asymptotic for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, American Journal of Mathematics, **120** (1998), 369-389.

[4] N.Hayashi and P.I.Naumkin, *Large time behavior of solutions for derivative cubic nonlinear Schrödinger equations without a self-conjugate property*, Funkcialaj Ekvacioj, **42** (1999), 311-324.

[5] N.Hayashi and T.Ozawa, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Differential and Integral Equations, **7** (1994), 453-461.

[6] S.Katayama and Y.Tsutsumi, *Global Existence of Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations in One Space Dimension*, Communications in Partial Differential Equations, **19** (1994), 1971-1997.

[7] C.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **10** (1993), 255-288.

[8] S.Klainerman and G.Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **36** (1983),133-141.

[9] P.I.Naumkin, *Cubic Derivative Nonlinear Schrödinger Equations*, to appear in SUT Journal of Mathematics.

[10] T.Ozawa, *Remarks on Quadratic Nonlinear Schrödinger Equations*, Funkcialaj Ekvacioj,**38** (1995), 217-232.

[11] T.Ozawa, *Finite Energy Solutions for the Schrödinger Equations with Quadratic Nonlinearity in One Space Dimension*, Funkcialaj Ekvacioj,**41** (1998), 451-468.

[12] J.Shatah, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, Journal of Differential Equations, **46** (1982), 409-425.

[13] J.Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **38** (1985), 685-696.