Inverse scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations with cubic convolution nonlinearity

東京都立大学博士課程 3 年
渡辺　道之

$(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$、$n \geq 3$ において、次の Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + V_0(x)u + V_1(x)(|x|^{-\sigma} * |u|^2)u \tag{1}$$

を考えよう。ここで $V_0(x)$ は実数値関数で遠方で十分速くゼロに近づくもの、実数値関数 $V_1(x)$ は有界で十分滑らかなものを想定する。$H_0 = -\Delta$、$H = H_0 + V_0$ とおこう。

$V_1(x) \equiv 0$ の場合の波動作用素を

$$W_{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

で、散乱作用素を $S_L = W_+^* W_-$ で定義する。

非線形方程式 V_0、$V_1(x) \not\equiv 0$ の場合、

$$(S_N \phi)(x) = \phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itH} V_1(|x|^{-\sigma} * |u|^2)u(t,x)\,dt$$

とおき散乱作用素を $S = W_+^* S_N W_-$ で定義する。以下 σ は条件 $2 \leq \sigma \leq 4$ かつ $\sigma < n$ を満たしているとする。V_0、V_1 の適当な条件のもとで、(1) に対する散乱作用素 S は H^1 のゼロの近傍で定義される (Yajima [4]、Mochizuki [1])。

ここでは以下の２つの問題を考える。

(i) 散乱作用素 S から V_0、V_1 を求めよ。
(ii) $V_0(x) \equiv 0$、$V_1(x) \equiv 1$ の場合について散乱作用素 S から σ を求めよ。

(i) の問題については power nonlinearity $|u|^{p-1}u$ の場合について結果がある (Strauss [2]、Weder [3])。また、$V_1(x) \equiv 0$ の場合について S_L から V_0 を再構成できることはよく知られている。

さて、(1) の場合 V_0、V_1 はそれぞれつぎのようにして求めることができる。

定理 1. 任意の $\phi \in H^1$ に対し次が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} S(\varepsilon\phi) = S_L \phi \qquad in \quad H^1。$$

定理 2. $\lambda \in \mathbf{R}$、x、$x_0 \in \mathbf{R}^n$ とし $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda(x - x_0))$、

$$T[\phi] := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^3} (\, (S_N - I)(\varepsilon\phi), \phi)$$

とおこう。任意の $\phi \in H^1$ に対し次が成り立つ。

$$V_1(x_0) = \frac{\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{2n+2-\sigma}\, T[\phi_\lambda]}{\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * |e^{-itH}\phi|^2) |e^{-itH}\phi|^2 \, dx \, dt}。$$

定理 2 を見てわかるように、V_1 が求まるためには σ は既知でなければならない。では σ が未知数としたら散乱作用素 S から σ を求めることはできるのだろうか？これが問題 (ii) である。$V_0 \equiv 0$、$V_1 \equiv 1$ の場合を考えよう。このとき σ は次のようにして求めることができる。

定理 3. $\phi_e(x) = \phi(ex)$ とおこう。任意の $\phi \in H^1$ に対して次が成り立つ。

$$\sigma = 2n + 2 + \log \frac{T[\phi_e]}{T[\phi]}。$$

参考文献

[1] Mochizuki, K., On small data scattering with cubic convolution nonlinearity, *J. Math. Soc. Japan.* **41** (1989), 143–160.

[2] Strauss, W. A., Non linear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", pp. 53–78. J. A. Lavita and J.-P. Marchand, editors, D. Reidel, Dordrecht-Holland / Boston, 1974

[3] Weder, R., Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation. Reconstruction of the Potential and the Nonlinearity. *Math. Methods. Appl. Sci.* **24** (2001), 245–254.

[4] Yajima, K., The $W^{k,p}$–continuous of wave operator for Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan.* **47** (1995), 551–581.