Wilcox 式と Lax-Phillips 式散乱理論の関係について

川下　美潮・広島大　理

波動方程式に対する散乱理論は、Wilcox [3] にあるようなシュレディンガー方程式に対して展開された方法を踏襲する方法と、Lax-Phillips [2] にあるような平行移動表現を構成する方法との 2 種類に大別される。どちらの方法で考えても散乱状態を記述していると考えられる散乱作用素（散乱核、散乱行列）は波動方程式の外部問題の場合には本質的に同じ物になることが分かる。この意味ではどちらの方法も本質的には同じことを行っていると考えられるが、これらの方法は一見して互いの関係がわかりにくく、従来は違ったものとして考えられていたように思う。この講演ではこれらの間の関係について次の (イ) に焦点を絞り述べる。

(イ) Wilcox 式と Lax-Philips 式の散乱理論は互いに関係があり、それは互いの散乱理論におけるスペクトル表現を通じて理解できる。

(ロ) この関係に着目すれば、これまで Lax-Phillips の方法では扱われていなかった問題についても比較的容易に散乱理論を展開できるようになる。

$\mathcal{H}$ は可分ヒルベルト空間とし、A は $\mathcal{H}$ 上の固有値をもたない非負値自己共役作用素とする。次の抽象方程式を考える。

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dt^2}+A\right)u(t)=0 & (t\in\mathbf{R}\text{ のとき}),\\[2ex] u(0)=f_1,\quad \frac{d}{dt}u(0)=f_2. \end{cases}$$

一般に音響波や弾性波の波動方程式は上の $\mathcal{H}$ と A を適当に選ぶことにより (1) の形で表すことができる。

散乱理論の定式化はいわゆる波動作用素 (wave operators)$W^{\pm}$ を経由し、散乱作用素 $S_W=(W^+)^{-1}W^-$ を構成することにより行われる。Wilcox[3] の定式化ではこれらの構成を A のスペクトル表現 $\Phi_{\pm}$ (定義は定理 0.1 で述べる) を構成することにより行われる。

一方、Lax-Phillips 式では (1) に対応するエネルギー空間 H 上のユニタリー群 $\{U(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ で (1) の解を表現する。この $U(t)$ に対し次の性質 (i)〜(iii) を持つ外向き空間 D_+ と内向き空間 D_- と呼ばれている H の閉部分空間を考える。

(i)　全ての $\pm t>0$ について $U(t)D_{\pm}\subset D_{\pm}$ となる。　(ii)　$\cap_{t\in\mathbf{R}}U(t)D_{\pm}=\{0\}$
(iii)　$\cup_{t\in\mathbf{R}}U(t)D_{\pm}\subset H$ は H で稠密である。

この $D_{\pm}$ が存在すれば散乱作用素を定義できるというのが Lax-Phillips 式の特徴である。実際 Lax-Phillips[2] において $D_{\pm}$ が存在することはある可分ヒルベルト空間 N とユニタリー写像 $T^{\pm}:H\to L^2(\mathbf{R};N)$（ノルムは $\|k\|^2_{L^2(\mathbf{R};N)}=4^{-1}(2\pi)^{-(n-2)}\int_{\mathbf{R}}\|k(s)\|^2_N\,ds$ で定める）で

$$(T^{\pm}U(t)\vec{\mathbf{f}})(s)=(T^{\pm}\vec{\mathbf{f}})(s-t)\quad(\text{すべての } t,\,s\in\mathbf{R}\text{ と }\vec{\mathbf{f}}\in H\text{ について})$$

を満たすものが存在することと同値である。また $T^{\pm}$ と $D_{\pm}$ には $T^{\pm}(D_{\pm})=\{k(s)\in L^2(\mathbf{R};N);k(s)=0\text{ in }\pm s<0\}$ の関係がある。このとき散乱作用素 S_{LP} は $T^+(T^-)^{-1}$ で定まる。このように Lax-Phillips 式では平行移動表現 $T^{\pm}$ が基本的な概念になる。

Wilcox 式と Lax-Phillips 式の散乱理論の間の関係は次のように述べることができる。

定理 0.1 次の (SPR) と (LP) は同値である。

(SPR) $I^1 = [0,\infty)$ と $I^2 = (-\infty, 0]$ のそれぞれにおいて、A のスペクトル表現 Φ^1, Φ^2 が存在する。すなわち、ある可分なヒルベルト空間 N とユニタリー作用素 $\Phi^i : \mathcal{H} \to L^2(I^i; N)$ ($i = 1, 2$, ノルムは $\|k\|^2_{L^2(I^i;N)} = (2\pi)^{-(n-2)} \int_{I^i} \|k(s)\|^2_N \, ds$ で定める) で、全ての $f \in \mathcal{H}$ と $[0,\infty)$ 上の有界可測関数 ψ に対し

$$(\Phi^i \psi(A) f)(\sigma) = \psi(\sigma^2)(\Phi^i f)(\sigma) \qquad (L^2(I^i; N) \text{ において})$$

となるものが存在する。

(LP) $\{U(t)\}$ の平行移動表現 T が存在する。

(イ) で述べた関係は Wilcox 式における Φ^1, Φ^2 と Lax-Phillips 式のスペクトル表現 $\mathcal{T}$ ($= T$ の逆フーリエ変換表示）との間の関係として与えられる。

次に平行移動表現の選択の可能性について考える。A のスペクトル表現 $\Phi^{1,0}$ を一つとり固定する。このとき $m(\sigma)$, $\tilde{m}(\sigma) \in E([0,\infty); N)$ が存在し $\Phi^2 f(-\sigma) = m(\sigma)\Phi^{1,0} f(\sigma)$, $\Phi^1 f(\sigma) = \tilde{m}(\sigma)\Phi^{1,0} f(\sigma)$ が成立することが分かる。但し $E([0,\infty); N)$ は $[0,\infty)$ 上の $B(N)$-値可測関数 $m(\sigma)$ のうちほとんど全ての $\sigma \geq 0$ でユニタリー作用素になっているものが作る集合を表す。故に Wilcox 式における $m(\sigma)$, $\tilde{m}(\sigma)$ を選ぶことが Lax-Phillips 式における平行移動表現を選ぶことに対応する。具体的な散乱問題の設定の場合にはこの事実に注意すればその問題固有の扱いが必要な部分がどこかということが明らかになり、これまで扱われていなかった場合にも Lax-Phillips 式散乱理論の展開が可能になる。

Wilcox 式と Lax-Phillips 式散乱理論において得られる散乱行列をそれぞれ $\mathcal{S}_W(\sigma)$ ($\sigma > 0$) と $\mathcal{S}_{LP}(\sigma)$ ($\sigma \in \mathbf{R}$) で表す。これらの散乱行列の間には次の関係がある。

定理 0.2 $\mathcal{S}_{LP}(\sigma)$ と $\mathcal{S}_W(\sigma)$ の間には次の関係がある。

$$\mathcal{S}_{LP}(\sigma) = \begin{cases} m_+(\sigma)\mathcal{S}_W(\sigma)(m_-(\sigma))^* & (\sigma > 0 \text{ のとき}) \\ \mathcal{S}_W(-\sigma) & (\sigma < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

但し $m_\pm(\sigma) \in E([0,\infty); N)$ は $\Phi^2_\pm f(-\sigma) = m_\pm(\sigma)\Phi^1_\pm f(\sigma)$ を満たすものである。

波動方程式の外部問題の場合には両理論における散乱行列の具体的な表示により $\mathcal{S}_{LP}(\sigma) = \mathcal{S}_W(|\sigma|)$ となっていることが分かる。この場合は $m_\pm(\sigma) \equiv 1$ なので定理 0.2 からも説明が付く。このように具体例における同値性は定理 0.2 にあるように一般化される。

参考文献

[1] Kawashita, M., Kawashita, W. and Soga, H. “Relation between Scattering theories of the Wilcox and Lax-Phillips types and a concrete construction of the translation representation” preprint.

[2] Lax and Phillips “Scattering theory” Academic Press, New York, 1966.

[3] Wilcox, C. H. Lect. Notes in Math., no. 442, Springer, Berlin, 1975.