Spectral properties of quasiperiodic Kronig-Penney model

中野史彦（東北大学理学研究科）

概 要

本研究は神永正博氏（東京電機大学）と共同で quasiperiodic Kronig-Penney model のスペクトルの性質を調べたものである。点スペクトルの非存在、対応する格子上でのハミルトニアンのスペクトルとの関係、スペクトルの特異連続性を示した。

次で与えられる Kronig-Penney model を考える。

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} V(j)\delta(x-j) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

より正確には Kronig-Penney model は１次元ラプラシアンにおいて各格子点上に境界条件を課したものとして定義される。

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{on } \mathcal{D},$$

ここで、

$$\mathcal{D} = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) : \psi'(j+) - \psi'(j-) = V(j)\psi(j),\ j \in \mathbb{Z}\}.$$

$H^p(\Omega)$ は開集合 $\Omega(\subset \mathbb{R})$ 上の p 次ソボレフ空間で、$V(j) \in \mathbb{R}$ $(j \in \mathbb{Z})$. H は自己共役である [6, 1]。V が周期的またはランダムポテンシャルであるときの H のスペクトルの性質は [1, 11] などにおいて研究されている。ここでは、次で与えられる準周期的ポテンシャルを考える。

$$V(j) = V_\theta(j) = \lambda_1 \chi_A(\Phi(\alpha j) + \theta) + \lambda_2 \chi_{A^c}(\Phi(\alpha j) + \theta), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

ここで、$\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ A = [1-\alpha, 1) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ \alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}^c$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は canonical projection である。このとき、(1) により定義される Krong-Penney Hamiltonian を H_θ と書くことにする。

準周期的ポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素については、次の格子上のハミルトニアン $h_\theta(\lambda)$ について様々な研究が行われている。

$$(h_\theta(\lambda)\varphi)(n) = \varphi(n+1) + \varphi(n-1) + \lambda v_\theta(n)\varphi(n), \quad \varphi \in l^2(\mathbb{Z}).$$

ここで、$\lambda \in \mathbb{R}$, $v_\theta(n) = \chi_A(\Phi(\alpha n) + \theta)$ である。$h_\theta(\lambda)$ については次のような結果が知られている。

(1) [12, 13]: このモデルの提唱

(2) [5, 9, 4]: 点スペクトルの非存在

(3) [3, 15, 16, 2]: スペクトルの特異連続性

(4) [8]: スペクトル測度の α-continuity (α 次ハウスドルフ測度についての連続性)

(5) [14]: スペクトル集合のハウスドルフ次元の評価

ここでは、Kronig-Penney model H_θ のスペクトルの性質を調べる。まず、$h_\theta(\lambda)$ について得られている結果 [9] における手法を適用すると次のことが得られる。

Theorem 1 **（点スペクトルの非存在）** $\sigma_p(H_\theta) = \emptyset$, *a.e-*$\theta$.

次にスペクトルの特異連続性を示したい。そのために $\sigma(H_\theta)$ と $\sigma(h_\theta(\lambda))$ との関係を調べた。結果を記述するために次の記号を用意する。

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} 2\cos\sqrt{x} + \lambda\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & (\text{if } x \neq 0) \\ 2+\lambda, & (\text{if } x = 0) \end{cases}$$

$$\Sigma(\lambda) = \left\{ E \in \mathbb{R} :\ g_\lambda(E) \in [-2, 2] \right\}$$

但し、$x < 0$ のときは $\Im\sqrt{x} \geq 0$ となるような分枝をとる。

Theorem 2 **（$\sigma(H_\theta)$ と $\sigma(h_\theta(\lambda))$ との関係）**

$\sigma(H_\theta) = \{E \in \mathbb{R} \ :\ g_{\lambda_2}(E) \in \sigma(h_\theta(\lambda)),\ \lambda = g_{\lambda_2}(E) - g_{\lambda_1}(E)\ \}.$

$\sigma(h_\theta(\lambda))$ は対応する転送行列のトレースをとって得られる数列が有界であるような集合（dynamical spectrum）と一致することが知られている [15]。H_θ について同様のことが成立つこと、また対応する数列が $h_\theta(\lambda)$ から得られるものと同一の漸化式を満たすことを示し、それぞれの数列の初期値を比較することにより Theorem 2 が得られる。さて、Theorem 2 より $\sigma(H_\theta)$ について次のことがわかる。

Corollary 1

(1) $\{n^2\pi^2 \mid n = 1, 2, \cdots\} \subset \sigma(H_\theta)$,

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$ のとき、$\sigma(H_\theta) \subset \Sigma(\min\{\lambda_1, \lambda_2\})$.

[16, 2] によれば、$\sigma(h_\theta(\lambda))$ のルベーグ測度は 0 であるが、同様のことを H_θ について示すのにこのことと Theorem 2 は十分ではない。しかし、次のことはわかる。

Theorem 3 （スペクトルの特異連続性） $\sigma(H_\theta) = \sigma_{sc}(H_\theta)$, *a.e.*-$(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$.

証明は $|\sigma(h_\theta(\lambda))| = 0$ が任意の $\lambda \neq 0$ について成立つことと（$|\cdot|$ はルベーグ測度）、Fubini の定理から得られる。

参考文献

[1] Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R., and Holden, H.: *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1988.

[2] Bellissard, J., Iochum, B., Scoppola, E., and Testard, D.: Spectral properties of one dimensional quasi-crystals, Commun. Math. Phys. **125** (1989), 527-543.

[3] Casdagli, M.: Symbolic Dynamics for the Renormalization Map of a Quasiperiodic Schrödinger Equation, Commun. Math. Phys. **107** (1986), 295-318.

[4] Damanik, D., Lenz, D.: Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, I. Absence of eigenvalues, Commun. Math. Phys. **207** (1999), 687-696.

[5] Delyon, F., Petritis, D.: Absence of localization in a class of Schrödinger operators with quasiperiodic potential, Commun. Math. Phys. **103** (1986), 441-444.

[6] Gesztesy, F., Kirsch, W.: One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set, J. Reine Angrew. Math. **362** (1985), 28-50.

[7] Jitomirskaya, S Last, Y.: Power-law subordinacy and singular spectra. I. Half-line operators. Acta Math. **183** (1999), no. 2, 171-189.

[8] Jitomirskaya, S. Last, Y.: Power law subordinacy and singular spectra. II. Line operators. Comm. Math. Phys. **211** (2000), no. 3, 643-658.

[9] Kaminaga, M.: Absence of point spectrum for a class of discrete Schrödinger operators with quasiperiodic potential, Forum Math. **8** (1996), 63-69.

[10] Kaminaga, M., Nakano, F.: Spectral properties of quasiperiodic Kronig-Penney model, to appear in Tsukuba Journal of Math.

[11] Kirsch, W., Martinelli, F.: On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 329-350.

[12] Kohmoto, M., Kadanoff, L. P., and Tang, C.: Localization problem in one dimension: mapping and escape, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1870-1872.

[13] Ostlund, S., Pandit, R., Rand, D., Schellnhuber, H. J., and Siggia, E. D.: One-dimensional Schrödinger equation with almost periodic potential, Phys. Rev. Lett. **50**(1983), 1873-1877.

[14] Raymond, L.: Constructive gap labeling theorem for the discrete Schrödinger operators on a quasiperiodic chain, preprint.

[15] Sütő, A.: The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger operator, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 409-415.

[16] Sütő, A.: Singular continuous spectrum on a Cantor set of zero Lebesgue measure for the Fibonacci Hamiltonian, J. Stat. Phys. **56** (1989), 525-531.

Author's address:

Fumihiko Nakano
Mathematical Institute, Tohoku University,
Sendai, 980-8578, JAPAN
e-mail: nakano@math.tohoku.ac.jp