WELL-POSEDNESS FOR THE FOURTH ORDER NONLINEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION RELATED TO THE VORTEX FILAMENT

瀬片 純市 (九州大学大学院数理学府 数理学専攻)

本講演では、境界のない無限領域を満たす非圧縮非粘性流体中の渦糸の 3 次元運動を近似する方程式で、渦核断面の変形が運動速度へ影響を及ぼすことを考慮したモデルとして、福本-Moffatt [2] により提唱された 4 階非線形 Schrödinger 型方程式の初期値問題について考える。

(4NLS)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \nu\partial_x^4 u = F(u,\overline{u},\partial_x u,\partial_x\overline{u},\partial_x^2 u,\partial_x^2\overline{u}), & (x,t)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

ここに $u(x,t)$ は複素数値未知関数であり、非線形項 F は次で与えられる。

$$F(u,\overline{u},\partial_x u,\partial_x\overline{u},\partial_x^2 u,\partial_x^2\overline{u}) = -\frac{1}{2}|u|^2u + \lambda_1|u|^4u + \lambda_2(\partial_x u)^2\overline{u} + \lambda_3|\partial_x u|^2 u + \lambda_4 u^2\partial_x^2\overline{u} + \lambda_5|u|^2\partial_x^2 u.$$

ここに $\lambda_1 = -3\mu/4, \lambda_2 = -2\mu+\nu/2, \lambda_3 = -4\mu-\nu, \lambda_4 = -\mu, \lambda_5 = -2\mu+\nu$ であり、μ,ν は実定数とする。

本講演では、初期値問題 (4NLS) の $\nu<0$ かつ $\mu-\nu/2=0$ すなわち、$\lambda_5=0$ の場合のなるべくひろい Sobolev 空間での時間局所適切性 (局所解の存在、一意性、初期値連続依存性) について得られた結果を報告する。主定理を述べる前にいくつか記号を導入する。

$\psi_T(t)$ を時間区間 $[-T,T]$ の cut-off function、すなわち $\psi_T\in C_0^\infty(\mathbf{R})$,

$$\psi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t|\le T, \\ 0 & |t|\ge 2T. \end{cases}$$

とする。$W_\nu(t)$ を (4NLS) の線形部分により生成される発展作用素とする。

これらの記号の下、我々は次の結果を得た。

Theorem 1. (4NLS) において $\nu<0,\ \mu-\nu/2=0$ すなわち、$\lambda_5=0$ とし、$s\ge 1/2,\ b\in(1/2,5/8)$ とする。 このとき、任意の $u_0\in H^s(e)$ に対し、 $T=T(\|u_0\|_{H^s})>0$ が存在し、時間区間 $[-T,T]$ で (4NLS) を満たす $u(t)$ が一意に存在する。さらに $u(t)$ は次の性質を満たす。

$$u\in C([-T,T];H^s(\mathbf{R})),$$
$$\psi_T W_\nu(-t)u \in H_t^b(\mathbf{R};H_x^s(\mathbf{R})),$$
$$\psi_T W_\nu(-t)F \in H_t^b(\mathbf{R};H_x^s(\mathbf{R})).$$

$T' \in (0,T)$ に対し、 $R = R(T') > 0$ が存在し、写像

$$\{\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbf{R});\ \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s} < R\} \ni \tilde{u}_0 \longmapsto \tilde{u} \in C([-T',T'];H^s(\mathbf{R})),$$
$$\{\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbf{R});\ \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s} < R\} \ni \tilde{u}_0 \longmapsto \psi_{T'} W_\nu(-t)\tilde{u} \in H^b_t(\mathbf{R};H^s_x(\mathbf{R})).$$

はそれぞれ Lipschitz 連続となる。

Remark 2. $\mu + \nu/2 = 0$ の場合、(4NLS) は完全可積分方程式であることが知られている (Fukumoto-Moffatt [2] 参照)。 また、この場合次のような無限個の保存量を持つ (Langer-Perline [5] 参照)。

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \qquad \Phi_2(u) = -\ fraci2 \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)\overline{u} dx,$$
$$\Phi_3(u) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x^2 u)\overline{u} dx - \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^4, \cdots .$$

しかしながら、(4NLS) において、$\lambda_5 = 0$、すなわち、$\mu - \nu/2 = 0$ を仮定しているため、 これらの保存量を用いて局所解を大域解に延長することが出来ない。

証明は、Bourgain [1], Kenig-Ponce-Vega [4] により確立された Fourier Restrict ion Method と、基本解にに対する一般的な Strichartz 評価を組み合わせることにより進める。

(4NLS) については、$\nu, s, b \in \mathbf{R}$ に対し、Fourier Restriction Norm を次のように定義する (Bourgain [1] 参照)。

$$\begin{aligned} \|u\|_{X^\nu_{s,b}} &= \|\langle \tau + \xi^2 - \nu\xi^4\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{\widehat{u}}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &= \|W_\nu(-t)u(t)\|_{H^b_t(;H^s_x)}. \end{aligned}$$

ここに $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$、$\widehat{\widehat{u}}(\xi,\tau)$ は、$u(x,t)$ の時間、空間両変数に関する Fourier 変換を表す。

線形評価に対しては Kenig-Ponce-Vega [3] の一般論により次を得る。

Proposition 3. $\nu < 0$. とする、このとき任意の $u_0 \in L^2$ 　に対し、

$$\begin{aligned} \|D_x^{\zeta\eta\theta/2} W_\nu(t)u_0\|_{L^q_t L^p_x} &\le C\|u_0\|_{L^2}, && \text{(Strichartz type estimate)} \\ \|D_x^{-1/4} W_\nu(t)u_0\|_{L^4_x L^\infty_t} &\le C\|u_0\|_{L^2}, && \text{(Kenig-Ruiz type estimate)} \\ \|D_x^{3/2} W_\nu(t)u_0\|_{L^\infty_x L^2_t} &\le C\|u_0\|_{L^2}, && \text{(Kato type smoothing effect)} \end{aligned}$$

が成立する。ここに、 $(\zeta,\eta,\theta) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$、 $(q,p) = (8/\zeta(\eta+1), 2/(1-\zeta))$。

非線形項の評価に対しては次が成立する。

Propotition 4. $\nu < 0$ とする。

$s \geq -1/2,\ a \in (-1/2, -1/4]$ 及び $b > 1/2$ とする。このとき

$$\||u|^2 u\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^3_{X^{\nu}_{s,b}}.$$

$s \geq 0,\ a \leq 0$ 及び $b > 1/2$ とする。このとき

$$\||u|^4 u\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^5_{X^{\nu}_{s,b}}.$$

$s \geq 1/2,\ a \in (-1/2, -1/4]$ 及び $b > 1/2$ とする。このとき

$$\|(\partial_x u)^2 \overline{u}\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^3_{X^{\nu}_{s,b}},$$

$$\||\partial_x u|^2 u\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^3_{X^{\nu}_{s,b}}.$$

$s \geq 1/2,\ a \in (-1/2, -3/8]$ 及び $b > 1/2$ とする。このとき

$$\|u^2 \partial_x^2 \overline{u}\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^3_{X^{\nu}_{s,b}}.$$

がそれぞれ成立する。

Remark 5. Theorem 1 において $\mu - \nu/2 = 0$ を仮定した。 それは次の tr i-linear estimate を得ることができなかったからである。

$$\||u|^2 \partial_x^2 u\|_{X^{\nu}_{s,a}} \leq C\|u\|^3_{X^{\nu}_{s,b}}.$$

この評価を示すことができれば、$\mu - \nu/2 = 0$ という仮定を取り除くことができる。

Theorem 1 の証明については、$\delta \in (0,1)$ に対し、

$$\Phi(u) = \psi_1(t) W_\nu(t) u_0 - i\psi_1(t) \int_0^t W_\nu(t - t')\psi_\delta(t')F(t')dt'$$

とおき、Φ が $X^{\nu}_{s,b}$ のある閉球上縮小写像であることを示す。その際、Proposition 3,4 が必要となる。

時間があれば、Tzvetkov [6] と同様にして得られた Theorem 1 のこの方法による最適性について説明する予定である。

References

[1] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I Schrödinger equations, II The KdV equation*, Geom, Funct. Anal., **3** (1993), 107-156, 209-262

[2] Y. Fukumoto and H. K. Moffatt, *Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part I. A higher-order asymptotic formula for the velocity*, J. Fluid. Mech., **417** (2000), 1-45

[3] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. math J., **40** (1991), 33-69

[4] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math J., **71** (1993), 1-21

[5] J. Langer and R. Perline, *Poisson geometry of the filament equation*, J. Nonlinear Sci., **1** (1991), 71-93

[6] N. Tzvetkov, *Remark on the ill-posedness for KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris., **329** (2000), 1043-1047