p ラプラシアンに伴う非線形常微分方程式の解の解析的特異性

上智大学理工学部
内山康一

概要

Sobolev - Poincaré の不等式の最良定数の決定に関連して，いわゆる p ラプラシアン $(1 < p < \infty)$ に伴う 1 次元区間 (a, b) 上の非線形 Dirichlet 問題：

$$(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u = 0 \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{2}$$

が大谷光春氏等によって研究され, 式 (1) を超関数の意味で満たす解 $u \in W_0^{1,p}(a, b)$ の一意存在，非自明解の集合の決定，解の微分可能性などが明らかにされている．

この問題に関して Philippines 大学の L. Paredes 氏との共同研究について報告をする．局所解を考察する．I を区間 $[a, b]$ の部分区間とする．我々の目標は I 上の (1) の解の解析的特異性を決定することである．方法として，確定型特異点をもつ非線形常微分方程式を用いる．得られた解析的表現の系として， x が $u(x)$ あるいは $u_x(x)$ の零点に近付くときの級数展開および従来の微分可能性や解析性を得ることができる．

1．$u(\sigma) = 0$ かつ $u_x(\sigma) = A \neq 0$ となる点 $\sigma \in I$ の近傍における局所解 $u(x)$ の解析的表現：

Theorem 0.1. $1 < p, q < \infty$ を満たす任意の p と q に対して, $x = \sigma$ の近傍において

$$u(x) = (x - \sigma)F(|x - \sigma|^q)$$

となるような解析関数 $F(\xi)$ が一意に存在する．$F(\xi)$ は $F(0) = A > 0$

と $F'(0) = \dfrac{-A^{q-p+1}}{q(q+1)(p-1)}$ を初期条件とする方程式

$$(p-1)[F(\xi)+q\xi F'(\xi)]^{p-2}[q(q+1)F'(\xi)+q^2\xi F''(\xi)]+(F(\xi))^{q-1}=0$$

の一意正則解である．

従って，$u(x)$ に対し $x=\sigma$ の近傍において収束級数表示：

$$u(x) = A(x-\sigma) - \frac{A^{q-p+1}}{q(q+1)(p-1)}(x-\sigma)|x-\sigma|^q + \cdots$$

がある．

2. $u(\tau)=A>0$ かつ $u_x(\tau)=0$ となる点 $\tau \in I$ の近傍における局所解 $u(x)$ の解析的表現：

Theorem 0.2. $1 < p, q < \infty$ を満たす任意の p と q に対して，$x=\tau$ の近傍において

$$u(x) = G\left(|x-\tau|^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

となるような $G(\xi)$ が一意に存在する．

$G(\xi)$ は $G(0)=A$ かつ $G'(0) = -\dfrac{p-1}{p}A^{\frac{q-1}{p-1}}$ を初期条件とする非線形方程式

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}(-G'(\xi))^{p-2}\left[G'(\xi)+p\xi G''(\xi)\right]+(G(\xi))^{q-1}=0$$

の一意正則解である．

従って，$x=\tau$ の近傍で収束級数表示

$$u(x) = A - \frac{p-1}{p}A^{\frac{q-1}{p-1}}|x-\tau|^{\frac{p}{p-1}} + \cdots$$

がある．