Feynman 経路積分と Riemann-Stieltjes 積分の順序交換

熊ノ郷　直人（工学院大学）

この講演では、時間分割法を用いて、一般的な汎関数 $F[\gamma]$ に対する Feynman 経路積分 $\displaystyle\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma]\mathcal{D}[\gamma]$ を数学的に定式化し、いくつかの性質を証明する。ここで $\gamma:[0,T]\to\mathbf{R}^d$ は時刻 0 に $x_0\in\mathbf{R}^d$ を出発し、時刻 T に $x\in\mathbf{R}^d$ に到着する経路であり、
$S[\gamma]=\displaystyle\int_0^T\frac{1}{2}\Big|\frac{d\gamma}{dt}\Big|^2-V(t,\gamma)dt$ は経路 γ の作用である。

$\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0$ は区間 $[0,T]$ の分割とする。$t_j=T_j-T_{j-1}$ とおき、分割の幅を $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とする。$x_{J+1}=x$ とおき $x_J, x_{J-1}, \ldots, x_1$ は $\mathbf{R}^d$ の任意の点として $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ は $j=1,2,\ldots,J+1$ に対して (T_j,x_j) と (T_{j-1},x_{j-1}) を線分で結ぶ折れ線経路とする。このとき $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ と $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ は有限個の変数 $x_{J+1}, x_J, \ldots,$ x_1, x_0 の関数となる。

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]=S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0)\,,\quad F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]=F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0)\,.$$

Feynman 経路積分を以下の式で定義する。

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma]\mathcal{D}[\gamma]=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\prod_{j=1}^{J+1}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar t_j}\right)^{d/2}\int_{\mathbf{R}^{dJ}}e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]}F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]\prod_{j=1}^{J}dx_j\,. \tag{1}$$

仮定１. $V(t,x)$ は $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ の実数値関数で、任意の多重指数 α に対して、
$\partial_x^\alpha V(t,x)$ は連続で、$|\partial_x^\alpha V(t,x)|\le A_\alpha\,,\ \ (|\alpha|\ge 2)$ を満たす。

藤原 [2] が最初に発見した仮定を改良して、以下の性質をみたす汎関数 $F[\gamma]$ の属するクラス $\mathcal{F}$ を定義した。藤原タイプのクラス $\mathcal{F}$ の正確な定義は [3] を参照。

定理１. $F[\gamma]\in\mathcal{F}$, $G[\gamma]\in\mathcal{F}\Longrightarrow F[\gamma]+G[\gamma]\in\mathcal{F}$, $F[\gamma]G[\gamma]\in\mathcal{F}$

定理２. T が十分小さいとする。すべての $F[\gamma]\in\mathcal{F}$ に対して、(1) の右辺のすべての導関数は $(x,x_0)\in\mathbf{R}^{2d}$

仮定２. m は非負整数とする。$B(t,x)$ は任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は
$[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 上で連続で $|\partial_x^\alpha B(t,x)|\le C_\alpha(1+|x|)^m$ を満たす。

定理３.（Riemann-Stieltjes 積分との順序交換） $B(t,x)$ は仮定２をみたすと仮定する。$0 \le T' \le T'' \le T$, $0 \le \tau \le T$ とし、$\rho(\tau)$ は $[T', T'']$ 上の有界変動関数とする。このとき、以下が成立する。

(1) $F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} B(\tau, \gamma(\tau)) d\rho(\tau) \in \mathcal{F}$

(2) $F[\gamma] = B(\tau, \gamma(\tau)) \in \mathcal{F}$

(3) さらに T が十分小さいと仮定する。すべての $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} \int_{T'}^{T''} B(\tau, \gamma(\tau)) d\rho(\tau) F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \int_{T'}^{T''} \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} B(\tau, \gamma(\tau)) F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] d\rho(\tau)\,. \tag{2}$$

定理４.（解析的演算） $B(t,x)$ は $m=0$ として仮定２をみたすと仮定する。$f(b)$, $f_k(b)$ は $|b| \le \mu$ で解析的な関数で、ある正の定数 A で $\lim_{k\to\infty} ||f_k - f||_{\mu,A} = 0$ とする。ただし $||f||_{\mu,A} = \sup_{n,\,|b|\le\mu} |\partial_b^n f(b)|/(A^n n!)$ とする。このとき

(1) $F[\gamma] = f\left(\int_{T'}^{T''} B(\tau, \gamma(\tau)) d\rho(\tau)\right) \in \mathcal{F}$

(2) さらに T が十分小さいと仮定する。すべての $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} f_k\left(\int_{T'}^{T''} B(\tau, \gamma(\tau)) d\rho(\tau)\right) F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} f\left(\int_{T'}^{T''} B(\tau, \gamma(\tau)) d\rho(\tau)\right) F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

定理５.（準古典近似） T は十分小さいとする。$F[\gamma] \in \mathcal{F}$ は $C([0,T] \to \mathbf{R}^d)$ 上 $||\gamma|| = \max_{0\le\tau\le T} |\gamma(\tau)|$ に関して連続とする。このとき、

$$\lim_{\hbar\to 0} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T}\right)^{-d/2} e^{-\frac{i}{\hbar}S[\gamma^{cl}]} \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = D(T, x, x_0)^{-1/2} F[\gamma^{cl}]\,, \tag{4}$$

が $(x, x_0) \in \mathbf{R}^{2d}$ 上広義一様収束する。ここで γ^{cl} は時刻 0 に x_0 を出発し、時刻 T に x に到達する古典経路で $D(T, x, x_0)$ は Morette-Van Vleck の行列式である。

References

[1] R. P. Feynman. *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics.* Reviews of Modern Physics, Vol 20, pp. 367–387 (1948).

[2] D. Fujiwara. *The stationary phase method with an estimate of the remainder term of large dimension* Nagoya Mathematical Journal, Vol 124, pp. 61–97 (1991).

[3] N. Kumano-go. *Interchange with Feynman Path Integrals and Riemann-Stieltjes Integrals.* Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, UTMS 2002-37 (2002).

参考．$\mathcal{F}$ の定義について

$1 \le l \le L \le J+1$ に対して、

$$T_{L,l} = t_L + t_{L-1} + \cdots + t_l\,. \tag{5}$$

とおく。扱える汎関数 $F[\gamma]$ を一般化するために、非負のパラメータ

$$u_j \ge 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, J, J+1\,, \tag{6}$$

を導入する。 $1 \le l \le L \le J+1$ に対して、

$$U_{L,l} = u_L + u_{L-1} + \cdots + u_l \tag{7}$$

とおく。u_j の和は t_j の和と同じく、分割によらず有界と仮定する。

$$U_{J+1} = \sum_{j=1}^{J+1} u_j \le U < \infty\,. \tag{8}$$

しかし、$t_j > 0$ と違って $u_j \ge 0$ である。$U_{j_k, j_{k-1}+1}$ は汎関数 $F[\gamma]$ の仮定 (2) で用いる。
　汎関数 $F[\gamma]$ の仮定は相関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ の停留点に依存する。
簡単のため、$0 \le l \le L \le J+1$ に対して

$$x_{L,l} = (x_L, x_{L-1}, \ldots, x_l)\,. \tag{9}$$

とおく。また

$$\omega(x_{J+1,0}) = \sum_{j=1}^{J+1} t_j \int_0^1 V(\theta t_j + T_{j-1}, \theta x_j + (1-\theta) x_{j-1}) d\theta\,, \tag{10}$$

とおく。このとき

$$S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_{J,1}, x_0) = \sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j} - \omega(x_{J+1,0})\,, \tag{11}$$

となる。$1 \le l \le L \le J$ に対して、$x^\dagger_{L,l} = x^\dagger_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1})$ を

$$(\partial_{x_{L,l}} S_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1,L+1}, x^\dagger_{L,l}, x_{l-1,0}) = 0\,, \tag{12}$$

で定義する。汎関数 $F[\gamma]$ の仮定 (1)(2)(3)(4) で、この停留点 $x^\dagger_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1})$ を用いる。
　次に、$1 \le n \le N \le J$ に対して、$x^\triangleleft_{N,n} = x^\triangleleft_{N,n}(x_{N+1}, x_{n-1})$ を

$$x^\triangleleft_j = \frac{T_{j,n}}{T_{N+1,n}} x_{N+1} + \frac{T_{N+1,n} - T_{j,n}}{T_{N+1,n}} x_{n-1}\,, \quad j = n, n+1, \ldots, N\,. \tag{13}$$

で定義する。$0 \le \epsilon \le 1$ に対して

$$\omega_\epsilon(x_{J+1,0}) = \epsilon \omega(x_{J+1,0}) + (1-\epsilon)\omega(x_{J+1,N+1}, x^\triangleleft_{N,n}, x_{n-1,0})\,, \tag{14}$$

とおき

$$S_\epsilon(x_{J+1,0}) = \sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j} - \omega_\epsilon(x_{J+1,0})\,, \tag{15}$$

とおく。$1 \le l \le n \le N \le L \le J$ に対して、$x^*_{L,l} = x^*_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1};\epsilon)$ を

$$(\partial_{x_{L,l}} S_\epsilon)(x_{J+1,L+1}, x^*_{L,l}, x_{l-1,0}) = 0\,, \tag{16}$$

で定義する。汎関数 $F[\gamma]$ の仮定 (3)(4) で、この停留点 $x^*_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1})$ を用いる。

さて、汎関数 $F[\gamma]$ の仮定を述べよう。このタイプの仮定は藤原 [2] により最初に発見された。藤原 [2] の仮定は以下の仮定の (1) の $m=0$ の場合に該当し、余りの有界性を保証する。我々はより一般的な汎関数 $F[\gamma]$ に拡張するために $m \ge 0$ とし、さらに主部と余りが収束するように (2)(3)(4) を加えた。 仮定は一見複雑に見えるが、補題の停留点の性質を用いれば、定理３、定理４が $\mathcal{F}$ に属していることをチェックするのは易しい。

仮定.（汎関数 $F[\gamma]$ の仮定） m は非負整数で、汎関数 $F[\gamma]$ の定義域は少なくともすべての折れ線を含む。任意の非負整数 M に対して、正の定数 C_M が存在し、任意の分割 $\Delta_{T,0}$、任意の正の整数

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < j_2 < \cdots < j_{K-1} < j_K - 1 < j_K \le J+1\,, \tag{17}$$

($j_{K+1} - 1 = J+1$)、任意の $|\alpha_j| \le M$, $j = j_0, j_1 - 1, \ldots, j_K, j_{K+1} - 1$ と任意の $1 \le s \le K$ に対して、以下が成立する。

(1)

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\prod_{k=0}^{K} \partial_{x_{j_{k+1}-1}}^{\alpha_{j_{k+1}-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}}\right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x^\dagger_{J,j_K+1}, x_{j_K},\\
&\cdots, x_{j_{s+1}-1}, x^\dagger_{j_{s+1}-2,j_s+1}, x_{j_s}, x_{j_s-1}, x^\dagger_{j_s-2,j_{s-1}+1}, x_{j_{s-1}},\\
&x_{j_{s-1}-1}, x^\dagger_{j_{s-1}-2,j_{s-2}+1}, x_{j_{s-2}}, \cdots, x_{j_1-1}, x^\dagger_{j_1-2,1}, x_0)\Bigg|\\
&\le (C_M)^{K+1}\Big(1 + |x_{J+1}| + |x_{j_K}| +\\
&\quad \cdots + |x_{j_{s+1}-1}| + |x_{j_s}| + |x_{j_s-1}| + |x_{j_{s-1}}|\\
&\quad +|x_{j_{s-1}-1}| + |x_{j_{s-2}}| + \cdots + |x_{j_1-1}| + |x_0|\Big)^m\,,
\end{aligned} \tag{18}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\prod_{k=0}^{K} \partial_{x_{j_{k+1}-1}}^{\alpha_{j_{k+1}-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}}\right) \partial_{x_{j_s-1}} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x^\dagger_{J,j_K+1}, x_{j_K},\\
&\cdots, x_{j_{s+1}-1}, x^\dagger_{j_{s+1}-2,j_s+1}, x_{j_s}, x_{j_s-1}, x^\dagger_{j_s-2,j_{s-1}+1}, x_{j_{s-1}},\\
&x_{j_{s-1}-1}, x^\dagger_{j_{s-1}-2,j_{s-2}+1}, x_{j_{s-2}}, \cdots, x_{j_1-1}, x^\dagger_{j_1-2,1}, x_0)\Bigg|\\
&\le (C_M)^{K+1}(U_{j_s,j_{s-1}+1})\Big(1 + |x_{J+1}| + |x_{j_K}| +\\
&\quad \cdots + |x_{j_{s+1}-1}| + |x_{j_s}| + |x_{j_s-1}| + |x_{j_{s-1}}|\\
&\quad +|x_{j_{s-1}-1}| + |x_{j_{s-2}}| + \cdots + |x_{j_1-1}| + |x_0|\Big)^m\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

任意の非負整数 M に対して、正の定数 C_M が存在し、任意の分割 $\Delta_{T,0}$、任意の正の整数

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < j_2 < \cdots < j_{K-1} < j_K - 1 < j_K \le J+1\,, \qquad (20)$$

($j_{K+1} - 1 = J+1$)、任意の $|\alpha_j| \le M$, $j = j_0, j_1 - 1, \ldots, j_K, j_{K+1} - 1$ と $j_{s-1} + 1 \le n \le N \le j_s - 1$ を満たす任意の n, N に対して、以下が成立する。

(3)

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \left(\prod_{k=0}^{K} \partial_{x_{j_{k+1}-1}}^{\alpha_{j_{k+1}-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x^{\dagger}_{J,j_K+1}, x_{j_K}, \\
&\cdots, x_{j_{s+1}-1}, x^{\dagger}_{j_{s+1}-2,j_s+1}, x_{j_s}, x^{*}_{j_s-1,j_{s-1}+1}, x_{j_{s-1}}, \\
&x_{j_{s-1}-1}, x^{\dagger}_{j_{s-1}-2,j_{s-2}+1}, x_{j_{s-2}}, \cdots, x_{j_1-1}, x^{\dagger}_{j_1-2,1}, x_0) \Bigg| \\
&\le (C_M)^{K+1} \Big(1 + |x_{J+1}| + |x_{j_K}| + \\
&\quad \cdots + |x_{j_{s+1}-1}| + |x_{j_s}| + |x_{j_{s-1}}| \\
&\quad + |x_{j_{s-1}-1}| + |x_{j_{s-2}}| + \cdots + |x_{j_1-1}| + |x_0| \Big)^m ,
\end{aligned} \qquad (21)$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \left(\prod_{k=0}^{K} \partial_{x_{j_{k+1}-1}}^{\alpha_{j_{k+1}-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}} \right) \partial_{\epsilon} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x^{\dagger}_{J,j_K+1}, x_{j_K}, \\
&\cdots, x_{j_{s+1}-1}, x^{\dagger}_{j_{s+1}-2,j_s+1}, x_{j_s}, x^{*}_{j_s-1,j_{s-1}+1}, x_{j_{s-1}}, \\
&x_{j_{s-1}-1}, x^{\dagger}_{j_{s-1}-2,j_{s-2}+1}, x_{j_{s-2}}, \cdots, x_{j_1-1}, x^{\dagger}_{j_1-2,1}, x_0) \Bigg| \\
&\le (C_M)^{K+1} (T_{N+1,n})^2 \Big(1 + |x_{J+1}| + |x_{j_K}| + \\
&\quad \cdots + |x_{j_{s+1}-1}| + |x_{j_s}| + |x_{j_{s-1}}| \\
&\quad + |x_{j_{s-1}-1}| + |x_{j_{s-2}}| + \cdots + |x_{j_1-1}| + |x_0| \Big)^{m+1} ,
\end{aligned} \qquad (22)$$

補題.(停留点の性質) 任意の多重指数 α, β に対して、正の定数 $C_{\alpha,\beta}$, $C'_{\alpha,\beta}$ が存在して、次を満たす。

$$\left| \partial_{x_{L+1}}^{\alpha} \partial_{x_{l-1}}^{\beta} x^{\dagger}_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1}) \right| \le C_{\alpha,\beta} (1 + |x_{L+1}| + |x_{l-1}|)^{(1-|\alpha+\beta|)_+} \,, \qquad (23)$$

$$\left| \partial_{x_{L+1}}^{\alpha} \partial_{x_{l-1}}^{\beta} x^{*}_{L,l}(x_{L+1}, x_{l-1}; \epsilon) \right| \le C_{\alpha,\beta} (1 + |x_{L+1}| + |x_{l-1}|)^{(1-|\alpha+\beta|)_+} \,, \qquad (24)$$

$$\left| \partial_{x_{L+1}}^{\alpha} \partial_{x_{l-1}}^{\beta} (\partial_{\epsilon} x^{*}_{L,l})(x_{L+1}, x_{l-1}; \epsilon) \right| \le C'_{\alpha,\beta} (T_{N+1,n})^2 (1 + |x_{L+1}| + |x_{l-1}|) \,. \qquad (25)$$