Feynman 経路積分に沿った線積分

熊ノ郷　直人（工学院大学）

この講演では、前の講演で定義した Feynman 経路積分に対して、Feynman 経路積分の経路に沿った新しい線積分を定義し、Feynman 経路積分において『微積分学の基本定理』が成立することを述べる。

経路空間上の線積分としては、確率解析として成功を収めた『伊藤積分』[1] と『Stratonovich 積分』[2] が有名である。

$x_0 \in \mathbf{R}^d$ と $x \in \mathbf{R}^d$ を固定する。$\Delta_{T,0}$ は区間 $[0,T]$ の任意の分割 $\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots > T_1 > T_0 = 0$ とする。$x_{J+1} = x$ とおき、x_J, x_{J-1}, $\cdots$, x_1 は $\mathbf{R}^d$ の任意の点とする。$\gamma_{\Delta_{T,0}}$ を任意の $j = 1, 2, \ldots, J+1$ に対して (T_j, x_j) と (T_{j-1}, x_{j-1}) を線分で結ぶ折れ線とする。$0 \le T' \le T'' \le T$ とする。荒く言えば、ブラウン運動 $\mathbf{B}(\tau)$ が折れ線 $\gamma_{\Delta_{T,0}}(\tau)$ と一致するとき、『伊藤積分』は折れ線 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ の端点で定義される。i.e.,

$$\int_{T'}^{T''} Z(\tau, \mathbf{B}(\tau)) \cdot d\mathbf{B}(\tau) \approx \sum_j Z(T_{j-1}, x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1})\,. \tag{1}$$

また、『Stratonovich 積分』は折れ線 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ の中点で定義される。i.e.,

$$\int_{T'}^{T''} Z(\tau, \mathbf{B}(\tau)) \circ d\mathbf{B}(\tau) \approx \sum_j Z\left(\frac{T_j + T_{j-1}}{2}, \frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) \cdot (x_j - x_{j-1})\,. \tag{2}$$

それに対して、この講演で定義した線積分は折れ線 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ に沿った線積分そのものである。i.e.,

$$\int_{T'}^{T''} Z(\tau, \gamma_{\Delta_{T,0}}(\tau)) \cdot d\gamma_{\Delta_{T,0}}(\tau)\,. \tag{3}$$

前の講演の仮定 1 とクラス $\mathcal{F}$ を用いて、結果を述べよう。

定理 1. m を非負整数とし、$0 \le T' \le T'' \le T$ とする。$Z(t,x)$ は $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}^d$ へのベクトル値関数で、任意の多重指数 α に対して、$\partial_x^\alpha Z(t,x)$ と $\partial_x^\alpha \partial_t Z(t,x)$ は $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ 上で連続で、正の定数 C_α が存在して

$$|\partial_x^\alpha Z(t,x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t Z(t,x)| \le C_\alpha (1 + |x|)^m\,. \tag{4}$$

を満たし、$\partial_x Z(t,x)$ は対称行列で ${}^t(\partial_x Z) = \partial_x Z$ を満たすと仮定する。このとき、線積分

$$F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} Z(\tau, \gamma(\tau)) \cdot d\gamma(\tau) \in \mathcal{F}\,, \tag{5}$$

が成立する。ただし $Z \cdot d\gamma$ は Z と $d\gamma$ の $\mathbf{R}^d$ における内積とする。

定理2. m を非負整数とし、$0 \leq T' \leq T'' \leq T$ とする。$f(t,x)$ は $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ 上の実数値関数とする。任意の多重指数 α に対して、$\partial_x^\alpha f(t,x)$ と $\partial_x^\alpha \partial_t f(t,x)$ は $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ 上連続で、正の定数 C_α が存在して

$$|\partial_x^\alpha f(t,x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t f(t,x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^m . \tag{6}$$

を満たすとする。このとき

$$F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(\tau, \gamma(\tau)) \cdot d\gamma(\tau) \in \mathcal{F} . \tag{7}$$

が成立する。さらに T が十分小さいと仮定する。このとき、Feynman 経路積分において『微分積分学の基本定理』が成立する。

$$\begin{aligned} &\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} \Big(f\left(T'', \gamma(T'')\right) - f\left(T', \gamma(T')\right) \Big) \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(\tau, \gamma(\tau)) \cdot d\gamma(\tau) + \int_{T'}^{T''} (\partial_t f)(\tau, \gamma(\tau)) d\tau \right) \mathcal{D}[\gamma] . \end{aligned} \tag{8}$$

系. $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$ が上の仮定をみたすとき、Feynman 経路積分において『部分積分の公式』も成立する。

References

[1] K. Itô. *Stochastic integral.* Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20, pp. 519–524 (1944).

[2] R. L. Stratonovich. *A new representation for stochastic integrals and equations.* J. SIAM Control, Vol 4, No. 2, pp. 362–371 (1966).

[3] N. Kumano-go. *New Curvilinear Integrals along Paths of Feynman Path Integral.* Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, UTMS 2003-6 (2003).

Feynman 経路積分の滑らかな汎関数微分

熊ノ郷　直人（工学院大学）

藤原　大輔（学習院大学）

この講演では、前の講演で定義した Feynman 経路積分における汎関数微分を数学的に定義する。この定義により、藤原タイプのクラス $\mathcal{F}$ に属する汎関数 $F[\gamma]$ は何回でも汎関数微分できる。さらに、この汎関数微分は Taylor 展開や部分積分も可能である。

我々の汎関数微分を述べよう。$\gamma : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ は $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x$ となる折れ線、$\eta : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ は $\eta(0) = \eta(T) = 0$ となる折れ線とする。このとき、折れ線 γ と折れ線 η の分点をすべて含む分割

$$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots > T_1 > T_0 = 0\,, \tag{9}$$

が存在する。さらに、$j = 1, 2, \ldots, J, J+1$ に対して (T_j, x_j) と (T_{j-1}, x_{j-1}) を線分で結ぶある折れ線 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ で

$$\gamma = \gamma_{\Delta_{T,0}}\,, \tag{10}$$

と書ける。$\eta(T_j) = y_j$, $j = 0, 1, \ldots, J, J+1$ とおき、$F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対して

$$F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \cdots, x_1, x_0)\,, \tag{11}$$

とおく。

定理１．（well-defined） 折れ線 η 方向の $F[\gamma]$ の汎関数微分を

$$(\delta F)[\gamma][\eta] = (\delta F)[\gamma_{\Delta_{T,0}}][\eta] = \sum_{j=1}^{J} (\partial_{x_j} F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_J, \cdots, x_1, x_0) \cdot y_j\,, \tag{12}$$

で定義する。このとき $(\delta F)[\gamma][\eta]$ は分割 $\Delta_{T,0}$ の選び方によらず well-defined である。さらに

$$(\delta F)[\gamma][\eta] \in \mathcal{F}\,. \tag{13}$$

系． $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ は何回でも汎関数微分できる。

定理２．（平行移動不変性） 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と $\eta(0) = \eta(T) = 0$ をみたす任意の折れ線 $\eta : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ に対して

$$F[\gamma + \eta] \in \mathcal{F}\,, \tag{14}$$

が成立する。さらに T が十分小さいとき

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma+\eta]} F[\gamma+\eta] \mathcal{D}[\gamma] = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]\,. \tag{15}$$

ここで T は $F[\gamma]$, η, $0 < \hbar < 1$ によらない。

定理３.（テーラー展開） T が十分小さいとき、任意の $F[\gamma]\in\mathcal{F}$, $\eta(0)=\eta(T)=0$ を満たす任意の折れ線 η, 任意の $0<\hbar<1$ に対して

$$\begin{aligned}&\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma+\eta]\mathcal{D}[\gamma]-\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!}\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}(\delta^k F)[\gamma][\eta][\eta]\cdots[\eta]\mathcal{D}[\gamma]\\&=\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}\left(\int_0^1\frac{(1-\theta)^K}{K!}(\delta^{K+1}F)[\gamma+\theta\eta][\eta][\eta]\cdots[\eta]d\theta\right)\mathcal{D}[\gamma]\,,\end{aligned}\tag{16}$$

が成立する。

定理４.（汎関数微分の特徴つけ） T が十分小さいとき、任意の $F[\gamma]\in\mathcal{F}$, $\eta(0)=\eta(T)=0$ を満たす任意の折れ線 η, 任意の $0<\hbar<1$ に対して

$$\frac{d}{ds}\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma+s\eta]\mathcal{D}[\gamma]\bigg|_{s=0}=\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}(\delta F)[\gamma][\eta]\mathcal{D}[\gamma]\,,\tag{17}$$

が成立する。

定理５.（部分積分）

$$(\delta S)[\gamma][\eta]\in\mathcal{F}\,,\tag{18}$$

が成立する。さらに T が十分小さいとき、任意の $F[\gamma]\in\mathcal{F}$, $\eta(0)=\eta(T)=0$ を満たす任意の折れ線 η, 任意の $0<\hbar<1$ に対して

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}(\delta F)[\gamma][\eta]\mathcal{D}[\gamma]=-\frac{i}{\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}(\delta S)[\gamma][\eta]F[\gamma]\mathcal{D}[\gamma]\,,\tag{19}$$

が成立する。

例.（前の講演の条件で）

(1) $F[\gamma]=\int_{T'}^{T''}B(\tau,\gamma(\tau))d\rho(\tau)$ のとき $(\delta F)[\gamma][\eta]=\int_{T'}^{T''}(\partial_x B)(\tau,\gamma(\tau))\cdot\eta(\tau)d\rho(\tau)$.

(2) $F[\gamma]=B(\tau,\gamma(\tau))$ のとき $(\delta F)[\gamma][\eta]=(\partial_x B)(\tau,\gamma(\tau))\cdot\eta(\tau)$.

(3) $F[\gamma]=\int_{T'}^{T''}Z(\tau,\gamma(\tau))\cdot d\gamma(\tau)$ のとき

$$\begin{aligned}(\delta F)[\gamma][\eta]\;&=\;Z(T'',\gamma(T''))\cdot\eta(T'')-Z(T',\gamma(T'))\cdot\eta(T')\\&\quad-\int_{T'}^{T''}(\partial_t Z)(\tau,\gamma(\tau))\cdot\eta(\tau)d\tau\,.\end{aligned}$$

References

[1] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* McGraw-Hill, New York, (1965).

[2] N. Kumano-go and D. Fujiwara. *Smooth functional derivatives in Feynman path integral.* Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, UTMS 2003-8 (2003).