Benjamin-Ono 方程式の導出について

大井健太

東京工業大学
大学院理工学研究科　数学専攻

概 要

Benjamin-Ono 方程式とは，水の波の二層流を記述する基礎方程式から形式的な近似により導出された非線形偏微分方程式である．Benjamin-Ono 方程式自体は，Korteweg-de Vires 方程式と並び，多くの研究者によって研究されているが，元の基礎方程式の解と Benjamin-Ono 方程式の解との関係を数学的に解析した結果はない．そこでこの論文ではその基礎方程式を無次元化し，ある無次元パラメーターの極限において Benjamin-Ono 方程式が導出されることの正当性を示していく．具体的には，比較的長い時間において無次元化された方程式の解が存在することを示し，その解と Benjamin-Ono 方程式の解の誤差を評価すことで，その正当性を与えた．

序

この論文では、二次元空間の水の波に対する二層問題を考える。ここで水の波とは、鉛直下向きの一様な重力場のもとでの非圧縮性完全流体の渦なし流のことを指す。上層の流体の厚みを無限、下層の流体の深さを有限とする。また、二層の間の境界は自由境界であると仮定し、さらにその自由境界に表面張力が働いている場合を考える。ここで自由境界とは、時間とともに変化する境界（内部遷移層）のこと指す。この論文では、自由境界の波、つまり自由境界の動きに注目し、その時間発展を考察していく。この流体モデルは渦なしという条件下の非圧縮性 Euler 方程式の自由境界問題として数学的に定式化される。

この方程式を適当に無次元化すると、４つのパラメーター $\delta, \varepsilon, \mu, \beta$ があらわれる。ここで、δ は下層の流体の平均の深さ h と自由境界の代表波長 l の比率、ε は自由境界の波の代表振幅 a と h との比率、μ は Bond 数、β は上層と下層の質量密度定数の比率である。Benjamin と Ono は、$\delta = \varepsilon \ll 1$ という関係を課して、Benjamin-Ono 方程式を形式的に導出した。この論文でも、このような関係を課し、自由境界の波の $\varepsilon \to 0$ のふるまいについて考えていく。$0 \le t \le O(1)$ という短い時間区間において自由境界の波の動きを近似的に見ると、その波は左右二つに別れ、それらの波が形状を変えることなしに一定の速度で、それぞれ反対方向に移動していくことが分かる。さらに $0 \le t \le O(1/\varepsilon)$ という比較的長い時間区間における自由境界の波の動きを調べていくために、$\tau = \varepsilon t$ という遅い時間スケールを導入し、その動きを見ていく。Benjamin-Ono 方程式はこの時間スケールのもとで形式的に導出される。この論文の目的は、この形式的導出の正当性を与えることである。

これまでに、Benjamin-Ono 方程式の導出の数学的な正当性を与えている結果はないが、KdV 方程式についての結果はいくつかある。その中でも、現在最も精度の高い論文が T. Iguchi の論文である。T. Iguchi は、水の波の一層問題の解の一様評価を導き、KdV 方程式の導出の正当性を与えた。さらに、水底に凹凸がある場合、その凹凸が KdV 近似に与える影響も調べた。この論文では、この T. Iguchi の理論を応用し、上記のように二層問題を無次元化し、$\varepsilon \to 0$ の極限において Benjamin-Ono 方程式が導出されることの正当性を与えた。具体的には、時間区間 $0 \le t \le O(1/\varepsilon)$ において二層問題の解が存在することを示し、その解と近似解の誤差の評価を行った。