1104618

定磁場をもつ非線形 Schrödinger 方程式の大域解について

数学専攻　田中克和
指導教員　加藤圭一

次の形の定磁場をもつ非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について考える．

$$\begin{cases} i\partial_t u = Lu + \lambda |u|^{p-1}u, & (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T,T), \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

ただし，$T>0$, $\lambda \neq 0$ とし，$\lambda > 0$ のとき $1<p<\infty$，$\lambda<0$ のとき $1<p<3$．また，作用素 L は次の形をした特殊 Hermite 作用素である．

$$L = \left(-i\partial_x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(-i\partial_y + \frac{x}{2}\right)^2 = -(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{4}(x^2+y^2) - i(x\partial_y - y\partial_x).$$

初期値問題 (1) を考えるため，まず線形の方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u = Lu, & (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T,T), \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

の解 $U(t)u_0$ を与え，解作用素 $U(t)$ に関する $L^p - L^q$ 評価式や Strichartz の評価式を導き，(1) の時間局所解の一意存在を示した．さらにエネルギー等式を用いて (1) の時間大域解を得た．

定理 1

u_0, $\partial_x u_0$, $\partial_y u_0$, xu_0, $yu_0 \in L^2$ をみたす任意の u_0 に対して，ある正定数 T が存在し，$(-T,T)$ 上で

$$u,\ \partial_x u,\ \partial_y u,\ xu,\ yu \in C((-T,T);L^2) \cap L^r((-T,T);L^{p+1})$$

をみたす初期値問題 (1) の解 u が一意的に存在する．ただし，r は

$$\frac{2}{r} = 1 - \frac{2}{p+1}$$

をみたすものとし，T は定数 λ, p と $\|u_0\|_{L^2}$, $\|\partial_x u_0\|_{L^2}$, $\|\partial_y u_0\|_{L^2}$, $\|xu_0\|_{L^2}$, $\|yu_0\|_{L^2}$ だけに依存して決まる．

定理 2

u_0, $\partial_x u_0$, $\partial_y u_0$, xu_0, $yu_0 \in L^2$ をみたす任意の u_0 に対して，定理 1 で与えられた (1) の時間局所解 u は時間大域的に一意に延長することができ，

$$u,\ \partial_x u,\ \partial_y u,\ xu,\ yu \in C(\mathbb{R};L^2) \cap L^r((-T,T);L^{p+1}), \qquad 0<T<\infty$$

をみたす．さらに，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対してエネルギー等式

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \qquad E(u(t)) = E(u_0)$$

が成り立つ．ただし，

$$E(v) = \frac{1}{2}\left(\|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|\partial_y v\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{8}\left(\|xv\|_{L^2}^2 + \|yv\|_{L^2}^2\right) + \frac{\lambda}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

参考文献

[1] 堤誉志雄，偏微分方程式論，培風館，2004.

[2] M. W. Wong, The Heat Equation for the Hermite Operator on the Heisenberg Group, Hokkaido Mathematical Journal, 2000.

[3] S. Thangavelu, Lectures on Hermite and Laguerre Expansions, Princeton University Press, 1993.