Modulation spaces $M^{p,q}$ for $0 < p, q \leqq \infty$

小林　政晴 (東京理科大学大学院理学研究科)

$1 \leqq p, q \leqq \infty$ の場合は通常の modulation 空間と一致するような modulation 空間 $M^{p,q}_{[g]}(\mathbf{R}^d)$（$0 \leqq p, q \leqq \infty$）が構成できることとその空間の性質を報告したい. ここで通常の意味での modulation 空間は, 次のように定義される：
急減少函数 $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \setminus \{0\}$ を固定し, $1 \leqq p, q \leqq \infty$ に対して modulation 空間 $M^{p,q}_{[g]}(\mathbf{R}^d)$ をノルム

$$||f||_{M^{p,q}} = \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |V_g f(x, \omega)|^p dx \Big)^{\frac{q}{p}} d\omega \Big)^{\frac{1}{q}}$$

が有限となる緩増加超関数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ 全体の空間と定義する. ここで, $V_g f$ は (超) 函数 $f(x)$ の g を窓とする短時間 Fourier 変換で

$$V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i \omega \cdot t} dt$$

で定義される. 多くの研究は $1 \leqq p, q \leqq \infty$ に制限されている. これは, 空間が窓 g の取り方によらないことを示すのに用いる合成積の L^p ノルムの評価が $p < 1$ の場合そう単純ではない所にあるが, 次に示す補題を用いれば, modulation 空間が定義され基本となる性質が示せる.

$0 < p \leqq \infty$ と コンパクト部分集合 $\Gamma \subset \mathbf{R}^d$ に対し, 函数空間 L^p_Γ を

$$L^p_\Gamma = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \mid \exists \xi_0 \in \mathbf{R}^d, \ \mathrm{supp}\widehat{f} \subset \xi_0 + \Gamma, \ ||f||_{L^p} < \infty \}$$

で定義すると次の補題が成り立つ.
補題　$0 < p \leqq 1$ とコンパクト部分集合 $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbf{R}^d$ に対し正の定数 C (Γ, Γ' の直径と p にのみ依存する) があって

$$\Big|\Big| |f| * |g| \Big|\Big|_{L^p} \leqq C ||f||_{L^p} ||g||_{L^p}, \quad \forall f \in L^p_\Gamma, \ \forall g \in L^p_{\Gamma'}$$

が成り立つ.
Modulation 空間 $M^{p,q}_{[g]}(\mathbf{R}^d)$ を次のように定義する. まず, $\alpha > 0$ をとり $\mathrm{supp}\ \widehat{g} \subset \{\xi \mid |\xi| \leqq 1\}$ かつ $\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \widehat{g}(\xi - \alpha k) \equiv 1$ なる $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の全体を $\Phi^\alpha(\mathbf{R}^d)$ とする. (以下, 函数空間 $\Phi^\alpha(\mathbf{R}^d) \neq \emptyset$ となるよう $\alpha > 0$ を十分小にとっておく)

$g \in \Phi^\alpha(\mathbf{R}^d)$ と $0 < p, q \leqq \infty$ をとる. 超函数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ に対し

$$||f||_{M^{p,q}_{[g]}} := \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \big(\int_{\mathbf{R}^d} \big| f * \big(M_\omega g\big)(x) \big|^p dx \Big)^{\frac{q}{p}} d\omega \Big)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する. $||f||_{M^{p,q}_{[g]}} < \infty$ なる超函数 f の全体を $M^{p,q}_{[g]}(\mathbf{R}^d)$ とする.

定理　$0 < p, q \leqq \infty$, $g \in \Phi^{\alpha}(\mathbf{R}^d)$ とする.

(1)
$$\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^d}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\big|f * \big(M_{\alpha k}g\big)(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

は $M^{p,q}_{[g]}(\mathbf{R}^d)$ 上の同値な (擬) ノルムとなる.

(2) $0 < p_0 \leqq p_1 \leqq \infty$ かつ $0 < q_0 \leqq q_1 \leqq \infty$ とすると

$$M^{p_0,q_0}_{[g]}(\mathbf{R}^d) \subset M^{p_1,q_1}_{[g]}(\mathbf{R}^d).$$

(3) $g_1, g_2 \in \Phi^{\alpha}(\mathbf{R}^d)$, とすると $||f||_{M^{p,q}_{[g_1]}}$ と $||f||_{M^{p,q}_{[g_2]}}$ は $M^{p,q}(\mathbf{R}^d)$ 上の同値な (擬) ノルムとなる.

(4) $(M^{p,q}(\mathbf{R}^d), ||\ ||_{M^{p,q}_{[g]}})$ は (擬)Banach 空間となる. [2], [6] では完備性が示されていない.

(5) 連続的な埋め込み

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset M^{p,q}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$$

が成り立つ.

(6) $0 < p, q < \infty$, ならば $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ は $M^{p,q}(\mathbf{R}^d)$ の稠密な部分集合である.

(7) $\beta > 0$ を十分小さくとっておけば

$$\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^d}\Big(\sum_{l \in \mathbf{Z}^d}\big|f * \big(M_{\alpha k}g\big)(\beta l)\big|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

は $M^{p,q}(\mathbf{R}^d)$ 上の同値な (擬) ノルムとなる.

参考文献

[1] H. G. Feichtinger, *A new class of function spaces.* Proc.Conf. “Constructive Function Theory”, Kiew 1983, (1984).

[2] Y. Galperin, S. Samarah, *Time-frequency analysis on modulation spaces $M^{p,q}_m$, $0 < p, q \leq \infty$.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 16 (2004), no. 1, 1–18.

[3] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis,* Birkhäuser, 2001.

[4] G. Köthe, *Topologische Lineare Räume I, Zweite Auflage, Springer 1966.*

[5] H. Triebel, *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser, Boston, 1983.

[6] H. Triebel, *Modulation spaces on the euclidean n-space,* Z. Anal. Anwendungen 2 (5) (1983) 443-457.