第 53 回神楽坂解析セミナー　　　2006.1.28

有界な2相媒質における Stokes 方程式に対する最大正則性

清水 扇丈　(静岡大工)

本研究は早稲田大学理工学術院の柴田良弘先生との共同研究である．

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ を有界領域としその境界を $\partial\Omega$ とする．Ω の部分領域 Ω_+ を Ω_+ の境界 Γ と $\partial\Omega$ の距離が正となるようにとる．$\Omega_- = \Omega \setminus \overline{\Omega_+}$ とおく．Stokes 方程式に対してこの 2 相媒質における次の界面問題を考える:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u_\pm - \mathrm{Div}\, S_\pm(u_\pm, \pi_\pm) = f_\pm, \quad \mathrm{div}\, u_\pm = g_\pm = \mathrm{div}\, \tilde{g}_\pm \quad \text{in } \Omega_\pm \times (0, \infty) \\
&[S_+(u_+, \pi_+) - S_-(u_-, \pi_-)]\nu|_\Gamma = h_+ - h_-|_\Gamma, \quad u_+|_\Gamma = u_-|_\Gamma \\
&u_-|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで $u_\pm(x,t)$，$\pi_\pm(x,t)$ は それぞれ $\Omega_\pm$ における流速ベクトルと圧力，

$$
S_\pm(u_\pm, \pi_\pm) = \mu_\pm D(u_\pm) - \pi_\pm I, \ \ D_{ij}(u_\pm) = (\partial u_{\pm i}/\partial x_j + \partial u_{\pm j}/\partial x_i).
$$

で $\mu_\pm$ は粘性係数である．Γ を $C^{2,1}$ 級, $\partial\Omega$ を $C^{1,1}$ 級超曲面とし ν, ν_0 をそれぞれ Γ, $\partial\Omega$ の単位外法線とする．$\Omega_\pm$ で定義された関数 $v_\pm$ に対し

$$
v(x) = \begin{cases} v_+(x) & x \in \Omega_+ \\ v_-(x) & x \in \Omega_- \end{cases}
$$

とおく．また Ω で定義された関数 v に対し $v_\pm$ を v の $\Omega_\pm$ への制限とする．(1) は外側の境界が固定されていて 2 相の非圧縮性粘性流体によって占められる，界面が自由境界となる問題を Lagrange 座標で表した非線形問題の線形化問題である．非線形問題は準線形であるため，非線形問題を解くために線形化問題 (1) の最大正則性を示す．

まず解析的半群を生成する．問題 (1) に対する Helmholtz 分解は

$$
\begin{aligned}
L_q(\Omega)^n &= J_q(\Omega) \oplus G_q(\Omega) \\
J_q(\Omega) &= \{u \in L_q(\Omega)^n \mid \mathrm{div}\, u = 0 \text{ in } \Omega, \ \nu_0 \cdot u|_{\partial\Omega} = 0\} \\
G_q(\Omega) &= \{\nabla\pi \mid \pi \in W_q^1(\Omega), \ \int_\Omega \pi\, dx = 0\}
\end{aligned}
$$

となる．$u_\pm \in W_q^2(\Omega_\pm)$ である $u \in W_q^1(\Omega)$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\Delta\rho_\pm = 0 \quad \text{in} \ \ \Omega_\pm \\
&\rho_+ - \rho_-|_\Gamma = \nu \cdot [\mu_+ D(u_+) - \mu_- D(u_-)]\nu - \mathrm{div}\, u_+ + \mathrm{div}\, u_-|_\Gamma \\
&\partial_{\nu_0}\rho_-|_{\partial\Omega} = \nu_0 \cdot \mu_- \Delta u_-|_{\partial\Omega}
\end{aligned}
$$

で $\int_\Omega \rho\, dx = 0$ を満たす解を $\rho_\pm = K_\pm(u)$ と定める．$K_\pm(u) \in W_q^1(\Omega_\pm)$ である．

$$
A_q u = -\mathrm{Div}\, S_\pm(u_\pm, K_\pm(u)) \qquad u \in \mathcal{D}(A_q)
$$

$$\mathcal{D}(A_q) = \{u \in W_q^1(\Omega)^n \cap J_q(\Omega) \mid u_\pm \in W_q^2(\Omega_\pm),\ u_-|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$u_+|_\Gamma = u_-|_\Gamma,\ \ [S_+(u_+, K_+(u)) - S_-(u_-, K_-(u))]\nu|_\Gamma = 0\}$$

とおくと A_q $(1 < q < \infty)$ は $J_q(\Omega)$ 上の解析的半群を生成する．1 相媒質における Stokes 方程式に対する Neumann 問題に対し最大正則性を示した [1] と同じ手法を用いる．即ち Weis [2], Denk-Hieber-Prüss [3] に基づき，モデル問題の解作用素の $\mathcal{R}$-boundedness を示し，作用素値 Fourier multiplier の定理を適用することによりモデル問題の解の最大正則性を示す．局所化の方法により領域 Ω における解に戻すとき，剰余項として現れる低階項を解析的半群の指数減衰性を用いて評価して (1) の指数安定な時間大域的 L_p-L_q 最大正則性定理を得る．次のように関数空間を定義する．

$$W_{q,p}^{\ell,m}(D \times (0,\infty)) = L_p((0,\infty), W_q^\ell(D)) \cap W_p^m((0,\infty), L_q(D))$$
$$D = \Omega,\ \Omega_\pm$$

$$< D_t >^{1/2} u(t) = \mathcal{F}^{-1}[(1+s^2)^{1/4}\mathcal{F}u(s)](t)$$
$$H_p^{1/2}(\mathbb{R}, X) = \{u \in L_p(\mathbb{R}, X) \mid < D_t >^{1/2} u \in L_p(\mathbb{R}, X)\}$$
$$H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega_\pm \times \mathbb{R}) = H_p^{1/2}(\mathbb{R}, L_q(\Omega_\pm)) \cap L_p(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega_\pm))$$
$$\mathcal{D}_{q,p}(\Omega) = [J_q(\Omega), \mathcal{D}(A_q)]_{1-1/p,p}, \quad [\ ,\ ]_{1-1/p,p} : \text{実補間関手}$$

Theorem 1. $1 < p, q < \infty$ とする．次を満たす $\gamma_0 > 0$ が存在する：

$$u_0 \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega),\ e^{\gamma t} f \in L_p((0,\infty), L_q(\Omega))^n,\ e^{\gamma t}\tilde{g} \in W_p^1((0,\infty), L_q(\Omega))^n,$$
$$e^{\gamma t} g_\pm \in L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega_\pm)),\ e^{\gamma t} h_\pm \in H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega_\pm \times (0,\infty))^n$$

がある $\gamma \in [0, \gamma_0]$ に対し成り立ち，$\int_\Omega g\,dx = 0$, $\int_{\partial\Omega} \nu_0 \cdot \tilde{g}\,d\sigma = 0$ であり，$t = 0$ で整合条件: $h_\pm = \tilde{g} = 0$ を満たすデータに対し (1) の一意解

$$(u_\pm, \pi_\pm) \in W_{q,p}^{2,1}(\Omega_\pm \times (0,\infty))^n \times L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega_\pm))$$

で $u \in W_{q,p}^{1,1}((\Omega \times (0,\infty))$, $\int_\Omega \pi\,dx = 0$ であるものが存在して，次の評価式を満たす：

$$\sum_{+-}(\|e^{\gamma t}u_\pm\|_{W_{q,p}^{2,1}(\Omega_\pm\times(0,\infty))} + \|e^{\gamma t}\pi_\pm\|_{L_p((0,\infty),W_q^1(\Omega_\pm))}) + \|e^{\gamma t}u\|_{W_{q,p}^{1,1}(\Omega\times(0,\infty))}$$
$$\leqq C\big\{\|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} + \|e^{\gamma t}f\|_{L_p((0,\infty),L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\tilde{g}\|_{W_p^1((0,\infty),L_q(\Omega))}$$
$$+ \sum_{+-}(\|e^{\gamma t}g_\pm\|_{L_p((0,\infty),W_q^1(\Omega_\pm))} + \|e^{\gamma t}h_\pm\|_{H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega_\pm\times(0,\infty))})\big\}$$

参考文献 [1] S. Shibata and S. Shimizu, Preprint (2005)
[2] L. Weis, Math. Ann., **319**, 735–758 (2001)
[3] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, Mem. Amer. Math. Soc., **166** (2003)