スケーリングと双対性-平均場階層からの非線形科学

鈴木貴（阪大・基礎工）

本講演では自己組織化、臨界現象、平均場階層、乱流、凝縮など、非平衡熱力学、流体、統計力学、場の理論の諸問題を**双対性：封印された変分構造**と**スケーリング：平均場階層の開示**の二つの数理的方法によって解明することを目指した [1] の概要を解説する。

1. 双対性. 双対性は弱解の構成と深くかかわっている。Riesz の表現定理から、例えば有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ に対して $C(\overline{\Omega})' \cong \mathcal{M}(\overline{\Omega})$, $L^1(\Omega)' \cong L^\infty(\Omega)$ であり、連続な近似解の族の一様評価、L^1 評価からそれぞれ、L^∞ 解、測度解が得られる。この近似の過程で連続性がどのように壊れ、また回復されるかということは非線形性の根幹に関わる問題で、界面、局在、爆発、ソリトン、混合、自己相似、ショック、波などの数理的に重要で普遍的な現象があぶり出される。さらに教条主義的な議論を振り切れば、弱解の一意性はなくても適切な指標や評価によってマクロな因果律を引き出せることが見えてくる。一方、$L\log L(\Omega)' \cong Exp(\Omega)$, $Exp(\Omega)' \cong L\log L(\Omega)$ は Hardy-BMO 双対の局所版であり、ここまでくれば回帰的双対関係であって、上で述べたような多くのカタストロフィが回避される一方、統計力学における熱力学的エントロピーと正準分配関数の関係でもあり、粒子と場の双対が回帰的に制御される実解析的な源泉である。その背後には Boltzmann 原理とゼータ関数によって記述されるミクロ状態があり、これらの関数空間は平均場階層と関係している。さらに双対性は作用素にも現れる。線形作用素を "積分 "したものが凸汎関数であり、これを "微分 "することなくそのまま転置したのが Legendre 変換である。線形作用素では転置を 2 回行えば元に戻るが、同じ性質-Fenchel-Moreau の双対性-が Legendre 変換にもあり、この性質からより複雑な Kuhn-Tucker 双対と Toland 双対が得られる。自由エネルギーのように凸汎関数の差で表される汎関数に対して成り立つのが後者である。結果として自由エネルギーは場の汎関数と双対であり、両者は Lagrange 関数で包括されることがわかる。Toland 双対は双対変分原理の最も標準的な形態で、送化性方程式、自己重力流体-プラズマ閉じ込め、定常乱流、量子化学などで典型的に見られる。こうした双対性は多くの場合粒子と場の間におこり、これらの自己相互作用は Lagrange 関数によって統括されているのである。

2. スケーリング. スケーリングに関する普遍性はマクロなモデルで顕著に現れ、繰り込み群と blowup analysis はその重要な帰結である。blowup analysis は concentration（例えば L^1 評価があり、L^∞ 評価がないような（近似）解の列の挙動）をスケーリングによって解明することにより、解の存在・一意性・普遍的性質を明らかにするもので、原系のスケーリング普遍性、スケール極限である全域解の分類、スケール解の遠方の挙動の制御、原系とスケールド系との階層的な議論の 4 つの要素から成り立っている。関係するスケーリングとして放物型系に対する backward と forward の自己相似変換があり、それぞれ爆発のレートと時空大域解の挙動を記述する。

3. 送化性方程式. 送化性方程式は、マクロな保存則と流束に関する現象論的関係式、マスター方程式に基づくミクロ階層の平均場、Helmholtz 自由エネルギーからの非平衡熱力学的関係の 3 つの側面を持つ。スケーリング普遍性、平均場階層、熱力学的に閉じた系、定常状態の量子化、凝縮、弱形式、2 次モーメント、concentration と aggregation といった数理構造があり、それに基づいて空間 2 次元での爆発解に対する collapse の形成とその質量の量子化が証明されている [2]。講演で全体像を解説するが、この議論の根幹となるのはスケーリングである。定理は次のように述べられる。$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は有界領域、境界 $\partial\Omega$ は滑らか、初期値 $u_0 = u_0(x)$ は $\overline{\Omega}$ 上滑らかとし、走化性方程式

$$
\begin{aligned}
& u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) \\
& -\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \qquad \text{in } \Omega \times (0,T) \\
& \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \\
& \int_\Omega v = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x)
\end{aligned}
$$

の解の存在時間を $T_{\max} \in (0, +\infty]$ とする。

Theorem 1 (formation of collapse)

$$n = 2, \quad T = T_{\max} < +\infty$$
$$\Rightarrow$$
$$u(x,t)dx \rightharpoonup \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0}(dx) + f(x)dx,$$

as $t \uparrow T$, *where* $0 \leq f = f(x) \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{S})$ *and*

$$\mathcal{S} = \left\{ x_0 \in \overline{\Omega} \mid \text{there exists } (x_k, t_k) \to (x_0, T) \right. \\ \left. \text{such that } u(x_k, t_k) \to +\infty \right\}.$$

Theorem 2 (mass quantization) *It holds that* $m(x_0) = m_*(x_0)$ *for any* $x_0 \in \mathcal{S}$*, and hence*

$$2 \cdot \sharp(\Omega \cap \mathcal{S}) + \sharp(\partial\Omega \cap \mathcal{S}) \leq \|u_0\|_1 / (4\pi),$$

where

$$m_*(x_0) = \begin{cases} 8\pi & (x_0 \in \Omega) \\ 4\pi & (x_0 \in \partial\Omega). \end{cases}$$

4. 自己集合. 現在のパラダイムでは、自己組織化は近平衡と遠平衡の階層的な発展の帰結とされている。近平衡の自己組織化が自己集合形成で、前項で述べた送化性方程式のように自由エネルギーや Lagrange 関数を用いてモデル A やモデル B 方程式として定式化される。これらの方程式は閉じた系であり、全体の自由エネルギーは減少していくにもかかわらず、送化性方程式では collapse mass の量子化の帰結として局所的な自由エネルギーは $+\infty$ に発散する（創発性）。[2] ではこれを次のようにまとめている。”爆発包の淵で質量とエントロピーが交換され、規格化された清浄な個体が誕生する。”さて、走化性方程式では、閉じた系において定常状態が力学系を制御するという非線形スペクトル力学が有効に機能している。実際定常問題は非局所項をもつ非線形固有値問題として実現され、指数非線形項と 2 次元の拡散との競合から爆発機構が量子化する。双対変分原理は定常問題が場と粒子とで等価な変分構造をもち、両者が Lagrange 関数で包括されことを保障する。帰結として得られる重要な性質が unfolding-minimality である。

5. 平均場理論. Toland 双対は多くの物理現象を、少なくとも定常・平衡状態では支配している。その一例が自己重力流体とプラズマ閉じ込め、2 次元乱流と自己双対ゲージ場、量子化学における波動関数と密度汎関数であり、双対変分構造をもちいると 2 次元で解明された量子化する爆発機構を 3 次元以上で再現することもできる。一方流体方程式を Euler 座標で見る限り変分構造はなく、時間発展のほうは不完全な双対性しか成り立たない。また相転移、相分離、記憶形状合金など臨界現象にかかわる現象論的理論では井戸型ポテンシャルを用いるので、凸解析から逸脱する。これは別の意味で不完全な双対性である。さらに散逸構造を記述する Prigogine の保存則の方程式では変分構造は近平衡でしか成り立ち得ない。腫瘍方程式はこうしたものの重要な例である。

参考文献

[1] T. Suzuki, *Mean Field Theories and Dual Variation*, Elsevier, Amsterdam, to be published.

[2] T. Suzuki, *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhäuser, Boston, 2005.

[3] T. Senba and T. Suzuki, *Applied Analysis*, Impreiral College Press, London, 2004.

[4] 上岡友紀・鈴木貴, 偏微分方程式講義・半線形楕円型方程式入門, 培風館, 2005.

[5] T. Suzuki and F. Takahashi, *Nonlinear eigenvalue problem with quantization*, HB of Nonlinear PDE, Stationary Problems, vol. 5, (ed. M. Chipot and P. Quittner), Elsevier, Amsterdam, to be published.

[6] T. Suzuki, *Semilinear Elliptic Equations*, Gakkotosyo, Tokyo, 1994.

[7] T. Kobayashi and T. Suzuki, *Weak solutions to the Navier-Stokes-Poisson equation*, preprint.

[8] A. Ito and T. Suzuki, *Asymptotic behavior of the solution to the non-isothermal phase field equation*, to appear in; Nonlinear Analysis.

[9] H. Ohtsuka and T. Suzuki, *Mean field equation for the equilibrium turbulence and a related functional inequality*, to appear in; Advances in Differential Equations

[10] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially-dominated nonlinearities*, Asymptotic Analysis **3** (1990) 173-188.