1104611

Burgers 方程式の解の漸近挙動について

数学専攻　児玉 侑子
指導教員　加藤 圭一

次の Burgers 方程式の初期値問題

$$\text{(IVP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u + u\partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

の解の漸近挙動について考える.
空間 2 次元の渦度方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \triangle\omega + (u, \nabla)\omega = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0,T), \\ u = K * \omega, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0,T) \text{ 上}, \\ \omega(x,0) = \omega_0(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

においては，スケール変換した関数族 $\{\omega_k\}$ が $k \to \infty$ とするとき mg ($m = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0 dx$) に $t = 1$ で一様収束することを示すことによって，総渦量 $\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x,t)dx$ が十分小さいときの 2 次元流の渦度が時間無限大で漸近的に mg に近づくことが Y.Giga によって知られている ([1]).
ただし， div $u = 0$, $K(x) = \frac{1}{2\pi}(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2})$ $(x \neq 0)$，$g(x,t)$ は Gauss 核である.
そこで，(IVP) の解 $u(x,t)$ に対し，

$$u_k(x,t) = ku(kx, k^2 t) \qquad (k > 0)$$

とスケール変換することにより上記の考察を適用したところ，Burgers 方程式の解の漸近挙動に関する以下の結果を得た.

定理　関数 u は初期値 $u_0 \in C_0(\mathbb{R})$ の (IVP) の解を表すものとする．$m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$ とする．このとき，ある正定数 m_0 で，$|m| < m_0$ ならば常に

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \|u - m\phi\|_{L^\infty}(t) = 0$$

を満たすものが存在する．ただし，$\phi(x,t)$ は

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{(e^{M/2} - 1)e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi} + (e^{M/2} - 1)\int_{x/\sqrt{4t}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi} \qquad \left(M := \int_{\mathbb{R}} \phi(x,t)dx \right)$$

とする.

参考文献

[1] 儀我 美一 , 儀我 美保, 非線形偏微分方程式, 共立出版, 2000.

[2] Thierry Gallay,C.Eugene Wayne, Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation, Comm.Math.Phys., 255, 97-129, 2005.