空間非一様な環境下での相転移現象モデルとしての４階の常微分方程式の定常解について

倉田　和浩 (首都大学東京・理工学研究科)
kurata@comp.metro-u.ac.jp

平成 18 年 11 月 25 日 at 神楽坂解析セミナー

この講演は, 一部, 清水英太氏 (足立西高校) との共同研究に基づくものである.

• $\gamma, \beta > 0$ として,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u^2)$$

は extended Fisher-Kolmogorov 方程式と呼ばれる方程式で, Dee-Saarloos によって 1988 年にパターン形成における双安定性をもつ高階方程式として提唱された. また, 相転移モデルの研究などにも現れる (see [1]). $\gamma = 0$ のときが, Fisher-Kolmogorov 方程式 (あるいは Allen-Cahn 方程式とも呼ばれる) である. x を止めて考えるとき, $u = +1$ という状態と $u = -1$ という状態が安定状態で $u = 0$ という状態が不安定である典型的な双安定な非線形項をもつ. ４階のモデルは 2 階のモデルと比較して, 遠距離敵相互作用を取り入れたモデルであるとも言える. その効果によって, 2 階方程式では現れなかった複雑なパターン (時空パターンだけでなく定常パターンでも) が起こりうるという点で興味深く多くの研究がなされている.　特に, $\beta^2 < 8\gamma$ という関係が満たされるとき, 2 階方程式では現れない **multi-transition kink 解** ($u(x) \to -1$ $(x \to -\infty)$ かつ $u(x) \to 1$ $(x \to +\infty)$ を満たし, 途中で何度も $+1, -1$ に近い値をとるような定常解のことをいう）の存在（しかもそれらは安定な解であることも）などが知られている (e.g. Kalies-Kwapisz-VanderVorst(Comm.Math.Phys.,**193**(1998), 337-371), Bonheure(Ann.I.H.Poincaré, Ana.Nonlinéaire,**21**(2004),319-340)).

また **multi-transition pulse 解** ($u(x) \to -1$ ($|x| \to \infty$) を満たし, 途中で何度も $+1, -1$ に近い値をとるような定常解) の存在も示されている. 逆に $\beta^2 > 8\gamma$ という場合には, 2 階方程式の場合と同様な解の構造をもち, pulse 解はなく, kink 解も単調な kink 解にしか存在しないことが知られている (van den Verg,J.Diff.Eq., 161(2000),110-153).

• この講演では, 空間の場所による環境効果が入ったモデルを考える. このとき 2 つの安定状態のエネルギーバランスが崩れる場所ができ, その効果によるパターン形成への影響を調べることを目的とする. 2 階方程式においては, こうした環境効果のパターン形成への影響はよく研究されているが, 4 階方程式に対してはあまり見かけない. 1 つの理由として, 技術的な手法の難しさがあると思われる. たとえば, 2 階方程式のときに使われる関数の切り貼り (trancation method) が 4 階の場合は難しい. そうした技術的なことはさておき, 空間的非一様な効果が方程式に入り込んだモデルで 2 階方程式の研究で見られるような環境効果と 4 階であることの効果との絡み合いで, どのような複雑な安定パターンの存在がいえるかを研究することは興味深いと思われる.

• 特に, この講演では**特異摂動問題**に対してそうした環境効果の下での multi-transition kink 解や multi-transition pulse 解の存在についての結果を報告する. $\beta > 0$ を正の定数として固定する. $\epsilon > 0$ に対して

$$\epsilon^4 u'''' - \epsilon^2 \beta u'' + (u^2 - 1)(u - a(x)) = 0, \; x \in \mathbf{R}^1$$

の解 $u(x)$ を考える. ここで $a \in C^1(\mathbf{R}^1)$ で supp a はコンパクトであって, 次の条件を満たすものとする.

$$-1 < \min_{\mathbf{R}} a < 0 < \max_{\mathbf{R}} a < 1$$

結果を簡単に述べるため, 次の単純な状況をさらに考えるものとする. ある $-\infty < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < +\infty$ があって, 次を満たす:

$$a(x) = 0, \; x \in (-\infty) \cup (x_3, +\infty),$$

$$0 < a(x) < 1, \; x \in (x_1, y_1) \cup (x_2, y_2),$$

$$-1 < a(x) < 0, \; x \in (y_1, x_2) \cup (y_2, x_3).$$

このとき次が成り立つ.

定理 1: 以上の仮定のもとで, 十分小さな $\epsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ に対して multi-transition kink 解 u_ϵ が存在する. 特に, u_ϵ は次の

漸近的挙動をもつ: $u_\epsilon(x) \to -1,\ x \to -\infty, u_\epsilon(x) \to +1,\ x \to +\infty$, かつ $u_\epsilon(x) \sim -1$ on any compact subset of $A = (-\infty, y_1) \cup (x_2, y_2)$, $u_\epsilon(x) \sim +1$ on any compact subset of $B = (y_1, x_2) \cup (y_2, x_3)$.

注意 1： (1) multi-transition pulse 解の存在についても a（x）に対する仮定を変更することで成り立つ.

(2) 関数の切り貼り法に関して, 方程式に空間依存がない場合に有効な clipping 法というものが知られているが, 上のように空間依存がはいった方程式に対しては使えない. この定理 1 の証明においては, ある素朴な制限つき変分法を用いて, 対応するエネルギー汎関数の Global minimizer として解をつかまえることができることを示す.

(3)　$\epsilon >$ が小さくなくても, 少なくとも $\beta > 0$ が小さい場合には同様の解の存在が期待されるがわかっていない.

(4) 対応する 2 階方程式（$\gamma = 0$ の場合のこと）については, Dancer-Yan の方法を用いることで対応するエネルギー汎関数の local minimizer も沢山作ることができる. 4 階方程式についてもそれに対応した解の存在が期待されるが未解決である. （数値シミュレーションではつかまることをサポートするような結果が得られている.)

• 上では, 遠方で $u = 1$ および $u = -1$ という 2 つの状態のエネルギーがバランスされている状況を扱ったが, 遠方でエネルギーバランスが崩れる場合の解の存在については次のことが言える.

仮定：$\{x|\ a(x) < 0\} \neq \emptyset$ であって, $\lim_{|x| \to +\infty} a(x) = a_\infty \in (0, 1)$.

定理 2: 上の仮定の下で, $\beta \geq 8\sqrt{1 - a_\infty}$ ならば, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して multi-transition pulse 解 u_ϵ が存在する.

注意 2：この証明には標準的な変分法を用いるが, 弱極限の非自明性の証明に Peletier,Rotariu-Bruna and Troy(J.Diff.Eq., **150**(1998), 124-187) による, 空間一様の場合の双安定非線形項を持つ 4 階方程式の解の非存在定理を用いる.

♣ 講演では, 定理 1 に関連して, Neumann 境界条件下での数値シミュレーション結果も紹介する予定である.　次の図でも見られるように, 数値シミュレーションでは β が小さいとき, 安定領域における解 u_ϵ の振動性が観測される. これも 4 階方程式の解に現れる特徴的な性質で興味深い. この部分の厳密な証明もできると思われる.

♣ 定理 1 であるような環境下で, 区間 $[0, 160]$ 上での Neumann 問題を考え, $\beta = 0.4, \epsilon = 0.01$ の時の multi-transition kink 解の１つの数値シミュレーション結果である. 数値計算における初期値も表示してある. 解が安定領域で振動している様子が見て取れる.

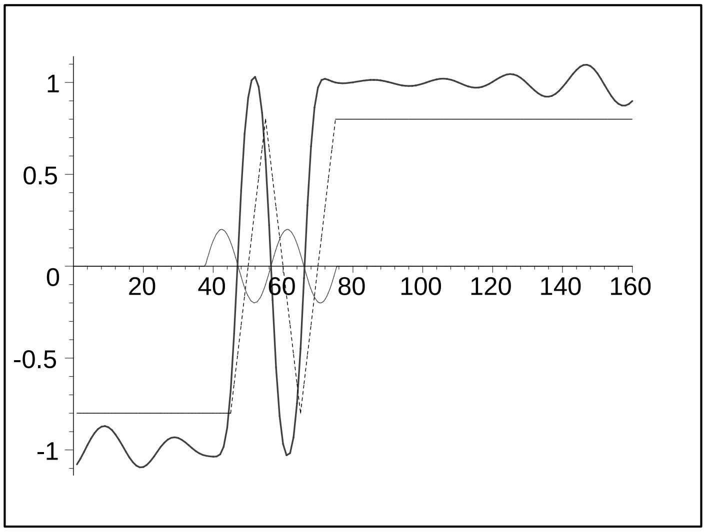

図 1: 環境因子と multi-transition kink 解

[1] L.A.Peletier, W.C.Troy, *Spacial patterns, Higher Order Models in Physics and Mechanics, Birkhäuser,2001.*