$\mathbb{R}^N$ におけるある楕円型方程式に対する符号変化する解の多重存在性を含む解の多重性の結果について

塩路直樹 (横浜国立大学大学院環境情報研究院)

1. 序

この講演では、次の楕円型方程式の解の多重性、特に符号変化する解の多重存在について議論する。

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = Q(x)|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし、$\mu > 0$, $N \geq 3$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ とし、$Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は連続関数とする。この問題に関わらず、符号変化する解の存在についての結果を得ている論文はいくつかあるが、Struwe [7] や Clapp-Weth [4] が指摘しているように、いくつかの論文には、その証明にギャップがある。そのギャップとは、$H^1(\mathbb{R}^N)$ における $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^2\,dx$ のフレッシェ微分可能性を無条件に仮定してしまっているものである。was unconditionally assumed (参考: [1,2,5,6,8,9] and [3, Chapter 8]). 問題 (2.1) は [2] において研究されているが、その論文でも先に説明したギャップがある。その証明の難点を克服し、次の結果を得た。

定理 1. $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は連続関数で、すべての $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $Q(x) > 1$ を満たし、$|x| \to \infty$ のとき $Q(x) \to 1$ とし、$Q(a^1) = Q(a^2) = M$ かつすべての $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{a^1, a^2\}$ に対し $Q(x) < M$ を満たす相異なる点 $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^N$ が存在すると仮定する。ただし、$M = \max\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^N\}$ とする。このとき、正数 μ が十分大きいならば、問題 (1.1) は、少なくとも *3* つの正値解と、少なくとも *4* つの符号変化する解のペアを持つ。

さらに仮定をおけば、もう 1 組符号変化する解のペアの存在が示せる。

定理 2. 先の定理の仮定を仮定する。もし、$M_1 > 2^{(p-1)/2}M/(M^{2/(p-1)}+1)^{(p-1)/2}$, $R > |a^1 - a^2|/2$ を満たす M_1, R が存在し、$\left|x - (a^1+a^2)/2\right| \leq R$ を満たす $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $Q(x) \geq M_1$ が成り立つならば、十分大きな μ に対して、もう *1* 組問題 (1.1) の符号変化する解のペアが存在する。

2. 定理 1 の証明の概略

$\lambda = 1/\sqrt{\mu}$, $v(x) = \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x)$ とすると、問題 (1.1) は、

$$\begin{cases} -\Delta v + v = Q(\lambda x)|v|^{p-1}v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{2.1}$$

と変形できる。十分小さい $\lambda > 0$ を取る。問題 (2.1) に対応する $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上の汎関数 I を

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} Q(\lambda x)|u|^{p+1}\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

と定める。$\eta > 0$ 及び $x \in \mathbb{R}^N$ に対し、$C_\eta[x] = \prod_{i=1}^N [x_i - \eta, x_i + \eta]$ と置く。$K, l > 0$ を、$C_l[a^1] \cap C_l[a^2] = \emptyset$ かつ $\bigcup_{j=1}^2 C_l[a^j] \subset \prod_{i=1}^N (-K, K)$ となるように選び、$\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 及び

$g \in C(H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ を

$$\phi(t) = \begin{cases} 2K/\lambda & t > 2K/\lambda \text{ のとき}, \\ t & -2K/\lambda \le t \le 2K/\lambda \text{ のとき}, \\ -2K/\lambda & t < -2K/\lambda \text{ のとき}, \end{cases}$$
$$g(u) = \big(g_1(u), \cdots, g_N(u)\big), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$$

と定める。ただし、$g_i(u)$ は、

$$g_i(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x_i)|u|^{p+1}\, dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\, dx, \quad i = 1, \ldots, N$$

である。各 $j, k \in \{1, 2\}$ に対し、

$$\Lambda = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : (\nabla I(u), u) = 0\};$$
$$\Lambda(j) = \{u \in \Lambda : g(u) \in C_{l/\lambda}[a^j/\lambda]\};$$
$$\Lambda_* = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^+ \in \Lambda,\ u^- \in \Lambda\};$$
$$\Lambda_*(j,k) = \{u \in \Lambda_* : u^+ \in \Lambda(j),\ u^- \in \Lambda(k)\}$$

と置く。次の命題を示すことにより、定理が証明される。

命題 1. 各 $j = 1, 2$ に対し、$I(u) = \min\{I(v) : v \in \Lambda(j)\}$ を満たす (2.1) の正値解 $u \in \Lambda(j)$ が存在する。

命題 2. $I(u) > \max\{\min\{I(v) : v \in \Lambda(j)\} : j \in \{1, 2\}\}$ を満たす (2.1) の正値解 u が存在する。

命題 3. 各 $(j, k) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ に対し、$I(u) = \min\{I(v) : v \in \Lambda_*(j, k)\}$ を満たす (2.1) の符号変化する解のペア $\pm u \in \Lambda_*(j, k)$ が存在する。

命題 4. $I(u) > \max\{\min\{I(v) : v \in \Lambda_*(j, k)\} : j, k \in \{1, 2\}\}$ を満たす (2.1) の符号変化する解のペア $\pm u$ が存在する。

参考文献

[1] D. Cao and E. S. Noussair, *Multiple positive and nodal solutions for semilinear elliptic problems with critical exponents*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1249–1271.

[2] ———, *Multiplicity of positive and nodal solutions for nonlinear elliptic problems in* $\mathbf{R}^N$, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), 567–588.

[3] J. Chabrowski, *Weak convergence methods for semilinear elliptic equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.

[4] M. Clapp and T. Weth, *Multiple solutions of nonlinear scalar field equations*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 1533–1554.

[5] G. Devillanova and S. Solimini, *A multiplicity result for elliptic equations at critical growth in low dimension*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 171–177.

[6] M. Struwe, *Infinitely many solutions of superlinear boundary value problems with rotational symmetry*, Arch. Math. **36** (1981), 360–369.

[7] ———, *Superlinear elliptic boundary value problems with rotational symmetry*, Arch. Math. **39** (1982), 233–240.

[8] G. Tarantello, *Multiplicity results for an inhomogeneous Neumann problem with critical exponent*, Manuscripta Math. **81** (1993), 57–78.

[9] Z. Xie, *Multiplicity of positive and nodal solutions for nonlinear elliptic problems in* $\mathbf{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), 1069–1097.