

# Stark ポテンシャルを伴った非線形 Schrödinger 方程式 時間大域解について

中村能久 (熊本大学大学院 自然科学研究科)

空間 3 次元において, 次の Stark ポテンシャルのついた非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(x)u + F(u), & (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

ここで  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2$ ,  $\partial_j = \partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ . 線形ポテンシャル  $V$  は次で与えられる (Stark ポテンシャル).

$$V(x) = -x_1 = E \cdot x \quad (E = (-1, 0, 0)), \quad (1)$$

非線形項  $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , である.

近年, ボーズ-アインシュタイン凝縮の発見に伴い, 線形ポテンシャル効果の入った非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の研究が盛んになってきている. 興味深い事にポテンシャル効果の入った NLS の解はポテンシャル効果の入っていない NLS の解と異なる性質を示す事がある. 例えば調和振動子ポテンシャル ( $V(x) = c|x|^2$ ) の場合, その効果により  $V \equiv 0$  の場合には爆発が起こる非線形項に対して時間大域解が存在したり, 長距離散乱理論が必要な非線形項に対して短距離散乱理論が適用できたり等である (例えば [2, 3] 参照). ここでは  $V(x)$  が空間に関して線形の場合 (1) を扱う. 線形散乱理論においては次の定理に基づき様々な結果が知られている (例えば [13] 参照).

定理 A (Avron and Herbst)  $H_E = -\frac{1}{2}\Delta - x_1$  とする.  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  に対して

$$\begin{aligned} e^{-itH_E} f &= U_E(t)f \\ &= e^{-\frac{it^3}{6}} e^{itx_1} e^{\frac{t^2}{2}E \cdot \nabla} e^{-itH_0} f, \end{aligned}$$

ここで  $g \in L^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  に対して  $e^{a \cdot \nabla} g(x) = g(x + a)$ , また  $H_0 = (-1/2)\Delta$  である.

Avron-Herbst の公式を (NLS) に適用すると次が得られる:

$$\begin{cases} i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = \lambda e^{2i(\frac{t^3}{3} + tx_1)} F(v), & (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (\text{trNLS})$$

ここで具体的に  $u(t, x) = e^{-\frac{it^3}{6}} e^{itx_1} v(t, x + \frac{t^2}{2}E)$  で与えられる.

(trNLS) を考察することにより (NLS) の解の存在等が示される ([4, 12] 参照). 今回得られた結果は (NLS) の初期値問題の時間大域解の存在に関してである. ( $E = 0$  の場合は, 例えば [5, 6, 7, 9, 10] 参照. また終値問題に関しては, 例えば [8, 11, 12] 参照).

次の重みつきソボレフ空間を導入する.  $m, s \in \mathbb{R}$  に対して,

$$H^{s,m} = \{f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{s,m} = \|\langle x \rangle^m \langle i\partial \rangle^s f\|_{L^2} < \infty\},$$

$$H^s = H^{s,0} \text{ (通常のソボレフ空間)}$$

ここで  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ .

**定理 1 (時間局所解)**  $u_0 \in H^3 \cap H^{1,2}$  とする. このとき次を満たす (NLS) の一意解が存在するような  $T = T(\|u_0\|_{H^3 \cap H^{1,2}}) > 0$  が存在する.

$$U(\cdot)U_E(-\cdot)u \in C([0, T]; H^3 \cap H^{1,2}).$$

ここで  $U(t) = e^{-itH_0} = e^{(it/2)\Delta}$ .

**注意 1** 定理 1 により任意の  $T > 1$  に対して, 十分小さな  $\varepsilon > 0$  が存在して, 初期値  $u_0$  が  $\|u_0\|_{H^3 \cap H^{1,2}} = \varepsilon^2$  を満たす (NLS) の解  $u$  が一意に存在し, 次の評価を満たす.

$$\sup_{t \in [0, T]} \{ \|U_E(-t)u(t)\|_{H^3} + \|J(t)U(t)U_E(-t)u(t)\|_{H^2}$$

$$+ \|J(t)^2U(t)U_E(-t)u(t)\|_{H^1} + \|U(t)U_E(-t)u(t)\|_{W^{1,\infty}} \} < \varepsilon.$$

ここで  $J_j(t) = x_j + it\partial_j$ ,  $J(t) = (J_1(t), J_2(t), J_3(t))$ .

**定理 2 (時間大域解)**  $u_0 \in H^4 \cap H^{1,2}$  を仮定する. さらに十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|u_0\|_{H^4 \cap H^{1,2}} = \varepsilon^2$  とする. このとき (NLS) の時間大域解  $u$  が一意に存在し, 次を満たす.

$$U(\cdot)U_E(-\cdot)u \in C([0, \infty); H^4 \cap H^{1,2}),$$

$$\sup_{t \geq 0} \{ \|U_E(-t)u(t)\|_{H^4} + \|J(t)U(t)U_E(-t)u(t)\|_{H^2}$$

$$+ \|J(t)^2U(t)U_E(-t)u(t)\|_{H^1} + \|U(t)U_E(-t)u(t)\|_{W^{1,\infty}} \} < \varepsilon,$$

**注意 2** 証明においてはゲージ不変性のない非線形項を評価する事が重要である *Avron-Herbst* の公式により, 非線形項に時間とある空間方向に依存する振動が生じる. そのため初期値問題 (NLS) の一意解  $u$  の微分は時間に関して増大する. しかし振動しながら増大するので, この振動に関して部分積分する事により必要な *decay* が得られ, (NLS) の大域解  $u$  の存在が証明される.

## 参考文献

- [1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.
- [2] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 4, 757–772.

- [3] R. Carles, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal., **35** (2003), no. 4, 823–843 .
- [4] R. Carles and Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential* Hokkaido Math. J., **33** (2004), No. 3, 719–729.
- [5] N. Hayashi, T. Mizumaschi and P.I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations, **16** (2003), 159–179.
- [6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to nonlinear Schrödinger equations and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369–389.
- [7] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equations*, Canad. J. Math., **54** (2002), No. 5, 1065–1085.
- [8] N. Hayashi, P.I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), No. 62, 1–16.
- [9] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, preprint (2007).
- [10] Y. Kawahara, *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations **18** (2005), No. 2, 169–194.
- [11] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space demension*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983–986.
- [12] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Remarks on long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with Stark effects*, J. Math. Kyoto Univ., **45** (2005), No. 1, 205–216.
- [13] 塩野入和彦, *Stark 効果を持つ 2 体 Schrödinger 作用素に対する散乱理論-新たな波動作用素の導入とその存在について-*, 神戸大学 修士論文 (2003).