Schrödinger equations on scattering manifolds and microlocal singularities

伊藤 健一 (筑波大学数理物質科学研究科)

以下の内容は中村周教授 (東京大学) との共同研究に基づいている．

散乱多様体上の Schrödinger 作用素

散乱多様体とは Melrose（1994）により導入された非コンパクト多様体の一クラスであり，散乱理論を多様体上で展開する際に有効とされている．Riemann 多様体 (M, g^{sc}) が散乱多様体であるとは次で定義される：

1. 多様体 M に対して分解 $M = M_0 \cup M_\infty$; $M_0 \Subset M$, $M_\infty \cong (0,\infty) \times \partial M$ が存在する．ただし ∂M はある閉多様体とする.（無限遠方における M の位相的境界に対応する.）
2. M_∞ の遠方（$r \to \infty$, $(r,\theta) \in (0,\infty) \times \partial M$）で計量 g^{sc} が錘型計量 $g^{\mathrm{cn}} = dr^2 + r^2 g^{\partial}_{jk} d\theta^j d\theta^k$ に近づく．ここで g^{∂} は ∂M 上の Riemann 計量である．

これらは極座標の自然な拡張であることに注意する：$\mathbb{R}^n = \{|x| < 1\} \cup ((0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1})$．このとき M の無限遠方は漸近的 Euclid 空間の構造を持つものと解釈される．我々はこの散乱多様体上で Laplace-Beltrami 作用素を用いた Schrödinger 作用素 $H = -\triangle_{\mathrm{sc}} + V$ を考える．ただしポテンシャル V は滑らかであり，遠方では ν (< 1) 次多項式以下の増大度をもつとする．

時間推進作用素の特異性の特徴付け

以上の条件の下で時間推進作用素 e^{-itH} の特異性を調べる．波動関数の波面集合は，古典的には，運動量無限大の成分に対応する．一方，e^{-itH} の波動関数への作用は，相空間で見た場合，対応する古典系の時間発展となる.（誤差を含む.）従って，波動関数の特異性の解析は，古典系における運動量無限大の粒子の運動の解析に対応する.（cf. 伝播速度無限大）この視点に依れば，初期状態における波面集合型の特異性は非零時間では波動関数の遠方での増大に移される．ここでは中村教授のアイデア (2003) に従って，増大度に変換された特異性を自由系の時間推進作用素を使って再び特異性へと引き戻すことを考える．我々は自由系として多様体 $M_{\mathrm{fr}} = \mathbb{R} \times \partial M$ 上の作用素 $H_{\mathrm{fr}} = -\partial_r^2$ を用いる．J を $(0,\infty) \times \partial M \supset M_{\mathrm{fr}}$ から M_∞ への滑らかな cutoff と自然な同一視の合成とする．計算により古典的逆散乱作用素が存在することが分かる：

$$\exists w_\pm^* = \lim_{t \to \pm\infty} \exp(-tH_{K_{\mathrm{fr}}}) \circ (J_{\mathrm{cl}})^* \circ \exp tH_K \colon T^*M \setminus \mathcal{T}_\pm \to T^*M_{\mathrm{fr}}.$$

ただし $K = \sum_{j,k} g_{\mathrm{sc}}^{jk} \xi_j \xi_k$, $K_{\mathrm{fr}}(r,\rho,\theta,\omega) = \rho^2$ であり，$J_{\mathrm{cl}} \colon M_{\mathrm{fr}} \supset (0,\infty) \times \partial M \xrightarrow{\cong} M_\infty$ は自然な同一視とする．$w_\pm^*$ は時間 $\pm\infty$ における古典散乱データである．ここで $(r,\theta) \in M_\infty$ から誘導される $T^*M_\infty = T^*(0,\infty) \times T^*\partial M$ の局所座標を (r,ρ,θ,ω) としている．

定理 1 $\pm t_0 > 0$ に対して

$$\mathrm{WF}(e^{-it_0 H} J e^{it_0 H_{\mathrm{fr}}} u) \setminus \mathcal{T}_{\mp} = (w_{\mp}^*)^{-1}(\mathrm{WF}(u)).$$

更に摂動項が適当に弱いことと $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T}_- = 0$（零切断）を仮定すると，$e^{-it_0 H} J e^{it_0 H_{\mathrm{fr}}}$ ($\pm t_0 > 0$) は Fourier 積分作用素であり，付随する正準関係は次で与えられる：

$$\mathcal{C}_{\mp} = \{(x, \xi, w_{\mp}^*(x, \xi)) \in (T^*M \setminus 0) \times (T^*M_{\mathrm{fr}} \setminus 0)\}$$

中村教授（2003）は漸近的 Euclid 空間において既に**定理 1** の前半部分と同様の結果を得ているが，比較系が異なるため，単純な拡張-制限の関係にはない．また**定理 1** は Hassell-Wunsch（2005）による先行結果にも類似しているが，我々のアイデアおよび手法はより自然で簡潔である．

波動作用素の特異性

$\nu < -1$ のとき波動作用素 $HJ - JH_{\mathrm{fr}}$ は H_{fr} に対して相対コンパクトではないが，波動作用素 $W_{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_{\mathrm{fr}}}$ が存在し，完全性が成り立つ．

定理 2 $\nu < -1$ とすると**定理 1** の $e^{-it_0 H} J e^{it_0 H_{\mathrm{fr}}}$ を $W_{\mp}$ で置き換えた結果が成立する．

更に散乱作用素 $S = W_+^* W_-$ を考える．対応する古典的散乱作用素は

$$S_{\mathrm{cn}}^{\mathrm{cl}} \colon \mathcal{U}_{\mathrm{fr},-} \to \mathcal{U}_{\mathrm{fr},+}, \quad S_{\mathrm{cn}}^{\mathrm{cl}}(r, \rho, \theta, \omega) = (-r, -\rho, \exp \pi H_{\sqrt{K_\partial}}(\theta, \omega))$$
$$\mathcal{U}_{\mathrm{fr},\pm} = \{(r, \rho, \theta, \omega) \in T^*M_{\mathrm{fr}};\ \pm\rho > 0,\ \omega \neq 0\}$$

で与えられる．ここで $K_\partial(\theta, \omega) = \sum_{jk} g_\partial^{jk}(\theta) \omega_j \omega_k$ である．

定理 3 $\nu < -1$ とする．このとき散乱作用素 $S = W_+^* W_-$ に対し，

$$\mathrm{WF}_{\mathrm{sc,fr}}(Su) \cap \mathcal{U}_{\mathrm{fr},+} = S_{\mathrm{cn}}^{\mathrm{cl}}(\mathrm{WF}_{\mathrm{sc,fr}}(u) \cap \mathcal{U}_{\mathrm{fr},-}).$$

Melrose-Zworski（1996）は散乱行列が Fourier 積分作用素で，その正準関係が

$$\mathcal{D} = \{(\exp \pi H_{\sqrt{K_\partial}}(\theta, \omega), \theta, \omega) \in (T^*\partial M \setminus 0) \times (T^*\partial M \setminus 0)\}.$$

となることを示しており，**定理 3** と深く関係している．しかし，我々のアイデアおよび手法はより自然で簡潔である．

参考文献

[1] A. Hassell, J. Wunsch, The Schrödinger propagator for scattering metrics, *Ann. Math.* **162**, 487-523.

[2] K. Ito, S. Nakamura, *Singularity of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold*, Preprint 2007. Available at `http://arxiv.org/abs/0711.3258`.

[3] R. B. Melrose, M. Zworski, Scattering metrics and geodesic flow at infinity, *Invent. Math.* **124** (1996), 389-436.

[4] S. Nakamura, *Wave Front Set for Solutions to Schrödinger Equations*, Preprint 2003. Available at `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~shu/list_of_papers.html`.