The dynamical aspects of elastic closed curves under uniform high pressure

岡部 真也 （東北大学大学院理学研究科）

本講演では, 平面内のピアノ線のような弾性体でできた閉曲線 γ に関する, 次の問題を考える:

問題 1. γ が囲む領域の内側とその外側から, それぞれ, 一様な圧力 p_i と p_o が γ にかかっているとする. $p := p_o - p_i > 0$ の場合, つまり外側からかかる圧力が内側からかかる圧力よりも大きい場合を考える. p が buckling load とよばれる値 p^* 以下のときは円が安定であるが, p が p^* をこえると円は不安定となり, 座屈が生じる. このとき, γ のダイナミクスはどのようなものか？

問題 1 を, γ の運動は適当なエネルギー汎函数の勾配流に支配され, 最終的な形状はそのエネルギー汎函数に対する変分問題によって決定される, として定式化する. 問題 1 における閉曲線の最終的形状を決定する数理モデルとして, I. Tadjbakhsh and F. Odeh ([4]) により次の変分問題が提唱された:

問題 2.

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa(s)^2\, ds + p\mathcal{A}(\gamma) \tag{1}$$

を S 上で最小化せよ. ただし, p は正定数であり, $\mathcal{A}$ は γ が囲む面積を表す.

κ は γ の曲率であり, 第一項は γ の弾性エネルギーを表す. また, 第二項は圧力 p が γ になす仕事を表す. さらに S は, 周長が L, 回転数が 1 であるような滑らかな平面閉曲線の集合である. 初期値問題の解の一意性から, この変分問題の任意の臨界点は次の境界値問題の解によって構成されることが容易に従う:

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases} \kappa''(s) + \dfrac{1}{2}\kappa^3(s) - \mu\kappa(s) - p = 0 \qquad \text{for} \quad s \in [0, L/(2n)]\,, \\ \displaystyle\int_0^{L/(2n)} \kappa(s)\, ds = \frac{\pi}{n}, \\ \kappa'(0) = \kappa'(L/(2n)) = 0. \end{cases}$$

ただし, n は $n \geq 2$ なる任意の自然数であり, $'$ は弧長パラメータ s に関する微分を表す. (P) の第一方程式はこの変分問題の Euler-Lagrange 方程式であり, κ とともに決定される Lagrange 乗数 μ を含んでいる. 二番目の積分条件は (P) の解から構成される閉曲線 γ の

回転数が 1 であることを意味している. (P) の狭義単調な解は, この変分問題の n モード解とよばれる. なぜなら, (P) の狭義単調な解から全区間 $[0, L]$ 上の解で周期境界条件を満たすものを構成することができ, さらにその解に相当する閉曲線はちょうど n 個の対称軸をもつからである.

この変分問題に関して Tadjbakhsh-Odeh ([4]) は, (i) 任意の $p > 0$ に対する最小解の存在, (ii) $p > p^*$ に対する円の不安定性, を証明した. さらに近年になって, K. Watanabe and I. Takagi ([5]) により非自明解である n モード解の, 楕円函数を用いた表現公式が与えられた. 一方で, これらモード解の性質については, これまで結果がほとんど得られていなかった. 本講演の主結果は, p が十分大きい場合における n モード解の安定性および不安定性に関してであり, 次のように述べることができる:

定理 1. 各 $n \geq 2$ に対して, 十分大きな正定数 P_n が存在し, 以下が成り立つ: (i) 任意の $p > P_2$ に対して, γ_2 は問題 2 の minimizer である; (ii) $n \geq 3$ とする. このとき, 各 $p > P_n$ に対して, 臨界点 γ_n は不安定である. さらに

$$\mathrm{Ind}(\gamma_n) \geq n - 1 \tag{2}$$

が成り立つ.

不安定性については, $E(\gamma)$ の第二変分の符号を調べることで証明が得られる. その中で $p \to \infty$ とするときの n モード解の漸近形 ([2]) が重要な役割を果たす. 一方, 安定性については, p が十分大きい場合には面積汎函数が支配的となることが漸近形に関する考察から従い, その事実を利用して, 2 モード解が minimizer であることを証明する.

次に閉曲線の運動について考える. 滑らかな初期閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える. ただし, $|{\gamma_0}'(x)| \equiv 0$ をみたすとする. 時刻 t における曲線の位置ベクトルを未知函数 $\gamma(x, t)$ により表す. 今, 弾性閉曲線の運動を考えているので, $\gamma(x, t)$ は次をみたすものとする:

$$\left| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \right| \equiv 1. \tag{3}$$

この条件は, 曲線が伸び縮みしないことを表現する. また, 条件 (3) のもとでは, Tadjbakhsh-Odeh 汎函数 (1) は次のように書ける:

$$E(\gamma(x, t)) = \frac{1}{2} \int_0^L \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, t) \right|^2 dx - \frac{p}{2} \int_0^L \boldsymbol{n}(x, t) \cdot \gamma(x, t)\, dx. \tag{4}$$

このとき, 条件 (3) に従う $\gamma(x, t)$ の汎函数 (4) に対する勾配流方程式として次が導出される:

$$\tag{GF} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(v - 2 \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right|^2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\} + p\, \boldsymbol{n}, \\ & -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right|^2 v = 2 \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right|^4 - \left| \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3} \right|^2 - p\, \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \end{aligned} \right.$$

方程式系 (GF) に対する初期値問題について次が従う:

定理 2. p を任意の正定数とする．また, $\gamma_0(x)$ を滑らかかつ周長が L であるような閉曲線とし, $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたすとする．このとき, (GF) は全ての $t>0$ に対して一意な古典解 $(\gamma(x,t), v(x,t))$ をもつ．また, 解 $\gamma(x,t)$ は条件 (3) をみたす．さらに, $t \to \infty$ とするとき, 解 $(\gamma(x,t), v(x,t))$ は定常方程式

$$\text{(BE)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right\} + p\,\boldsymbol{n} = 0, \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2 - p\,\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} \end{cases}$$

のある解 $(\hat{\gamma}(x), \hat{v}(x))$ に C^∞ 位相で収束する．

最後に各臨界点の近傍での曲線のダイナミクスについて考察する．以下, 簡単のため, γ_n の重心を原点 $(0,0)$ とする．ここで, 方程式系 (GF) のもとで重心が不変であることに注意されたい．$\tilde{S}$ を周長 L, 回転数 1 , 重心が原点である平面閉曲線 $\gamma \in W^{4,3}(S^1_L; \mathbb{R}^2)$ からなる集合とする．また, S を改めて, 周長 L, 回転数 1 , 重心原点であるような滑らかな平面閉曲線全体の集合とする．このとき, 定理 1 と定理 2 を合わせることにより, 次を得る:

定理 3. 各 $p > P_2$ に対して, ある正数 δ_p と集合 $\mathcal{C}_p := \{\gamma(x) \in \tilde{S} \mid 0 < E(\gamma) - E(\gamma_2) < \delta_p\}$ が存在して, $\gamma_0(x) \in \mathcal{C}_p$ ならば, $t \to \infty$ とするとき, $\gamma_0(x)$ を初期値とする (GF) の解 $\gamma(x,t)$ は γ_2 に収束する．一方, $n \geq 3$ かつ $p > P_n$ とする．このとき, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ と任意の自然数 $r \geq 0$ に対して, 以下をみたす閉曲線 $\gamma_0(x) \in S$ が存在する: (i) $\|\gamma_0 - \gamma_n\|_{C^r} < \varepsilon$; (ii) $t \to \infty$ とするとき, $\gamma_0(x)$ を初期値とする (GF) の解は $\gamma_n(x)$ に収束しない．

参考文献

[1] S. Okabe, *The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007) no. 4, 1871–1912.

[2] S. Okabe, *Asymptotic form of solutions of Tadjbakhsh-Odeh variational problem*, Advanced Studies in Pure Mathematics **47-2**, 2007, Asymptotic Analysis and Singularities, 709–728.

[3] S. Okabe, *The dynamics of elastic closed curves under uniform high pressure*, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.

[4] I. Tadjbakhsh and F. Odeh, *Equilibrium states of elastic rings*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 59–74.

[5] K. Watanabe and I. Takagi, *Representation formula for the critical points of the Tadjbakhsh-Odeh functional and its application*, preprint.