ある退化放物型方程式の解に対する HÖLDER 評価と漸近安定性について

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D3)

1. 退化 Keller-Segel 系の漸近安定性

次の退化 Keller-Segel 方程式系を考える:

$$\text{(dKS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \operatorname{div}(u\nabla\psi) = 0, & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \lambda\psi = u, & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

ただし, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ は定数とする. $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1}\nabla u)$ だから, $u = 0$ のとき拡散係数が消える, 退化した方程式となる. 退化した方程式には, 一般に古典解が存在するとは限らない. そこで (dKS) の弱解を導入する.

定義 1.1. 非負な初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ に対し, (u,ψ) が (dKS) の弱解であるとは, $T>0$ が存在して, 次をみたすときをいう:

i) 殆んどすべての $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ に対し, $u(t,x)\geq 0$,
ii) $u\in L^\infty(0,T\,;\,L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^\alpha \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$,
iii) 任意の $\varphi\in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ と, 殆んどすべての $0<t<T$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t)\varphi(t)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0\varphi(0)\,dx = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n}\Big\{ u(\tau)\partial_t\varphi(\tau) - \nabla u^\alpha(\tau)\cdot\nabla\varphi(\tau) + u(\tau)\nabla\psi(\tau)\cdot\nabla\varphi(\tau)\Big\}\,dx,$$

ただし, $\psi = (-\Delta+\lambda)^{-1}u$ は Bessel ポテンシャルで与えられる.

(dKS) の時間大域的弱解の存在, 非存在は, Sugiyama, Sugiyama-Kunii [5, 6] によって研究され, 次のことが知られている. 非負な初期値 $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ に対し, $1<\alpha\leq 2-\frac{2}{n}$ のとき, u_0 が (適当な意味で) 十分に小さければ, 時間大域的弱解が存在する. u_0 が小さくないときは, 解は有限時間で爆発する. それに対し, $\alpha > 2-\frac{2}{n}$ のときは, 任意の非負な初期値に対し, 時間大域的弱解が存在する. 本講演では $1<\alpha\leq 2-\frac{2}{n}$ かつ, u_0 が十分に小さい場合の解の時刻無限大における漸近挙動を考察する.

u_0 が十分に小さいことから (dKS) の非線形項 $\operatorname{div}(u\nabla\psi)$ も小さな摂動と推測できる. そのため (dKS) の解 u は多孔質媒質方程式

$$\text{(PME)} \qquad \begin{cases} \partial_t w - \Delta w^\alpha = 0, & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n, \\ w(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

の解 w に漸近的に近づくと推測できる. (PME) の自己相似解である Barenblatt 解は $\sigma = n(\alpha-1)+2$ としたとき,

$$U(t,x) = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}} V\left(\frac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}\right), \quad V(y) := \left(A - \frac{\alpha-1}{2\alpha}|y|^2\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

で与えられる. ここで $(f)_+ = \max\{f, 0\}$ である. Luckhaus-Sugiyama [3] は (dKS) の解に対して

(1.1) $$(1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

を示した. しかし, L^1 空間に対しては, $1 - \frac{1}{p}|_{p=1} = 0$ となるため, (1.1) から漸近安定性は得られるものの, 収束の速さはわからない. 他方, Ogawa [4] は $1 < \alpha < 2 - \frac{2}{n}$ のとき, $\nu > 0$ がとれて

(1.2) $$\|u(t) - U(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C(1+\sigma t)^{-\nu}$$

とできることを示した. この結果を示すために, 前方自己相似変換

$$s = \frac{1}{\sigma}\log(1+\sigma t), \qquad y = \frac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}$$
$$v(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} u(t,x), \qquad \phi(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} \psi(t,x).$$

を導入する. このとき, v は

$$\begin{cases} \partial_s v - \operatorname{div}_y(\nabla_y v^\alpha + yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi) = 0, & s > 0,\, y \in \mathbb{R}^n, \\ -e^{-2s}\Delta_y \phi + \lambda \phi = v, & s > 0,\, y \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,y) = u_0(y) \ge 0 \end{cases}$$

をみたす. ただし, $\kappa = n + 2 - \sigma = n(2-\alpha)$ である. さらに,

(1.3) $$(1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|v(s) - V\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

となることから, v が L^1 上指数的オーダーで V に収束することを示せば, (1.2) を得ることができる. Ogawa [4] は, v が指数的オーダーで収束することを示すために, 前方自己相似変換 v の時空間一様な Hölder 連続性を用いたが, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ については, 時空間一様な Hölder 連続性が明らかでなかったため, (dKS) の解の L^1 空間における収束の速さが求められていなかった. 我々は, v に関する時空間一様な Hölder 連続性を導出することで, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ に対する (dKS) の解の L^1 空間における収束の速さを得た.

定理 1.2 (Ogawa-M.). $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$, $n \ge 3$ とする. 十分に小さな非負の初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ は, ある $\gamma > n$ に対して, $|x|^\gamma u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする. このとき, $C, \nu > 0$ が存在して,

$$\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C(1+\sigma t)^{-\nu}, \quad t > 0$$

が成り立つ. ここで, Barenblatt 解 $\mathscr{U}$ は $\|\mathscr{U}(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ をみたすものとする.

収束の速さ $\nu > 0$ は, v の Hölder 指数によって決まることに注意しておく.

2. 前方自己相似変換の Hölder 連続性

前方自己相似変換 v の Hölder 連続性を考えるために, 次の退化放物型方程式を考える.

$$\text{(dP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), & t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^n \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

ここで, $\alpha > 1$ は定数であり, f は与えられた $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数である.

外力 f は xu や $u\nabla(-\Delta+\lambda)^{-1}u$ を想定している. xu は非有界な係数を持つことに注意する. また, $u\nabla(-\Delta+\lambda)^{-1}u$ は非局所的非線形項であり, 一般に比較原理が成り立たないことに注意する. このような外力を持つ (dP) の解の時空間一様な Hölder 連続性について考察する. Barenblatt 解は $f \equiv 0$ に対する (dP) の解となることから, (dP) の解は一般に滑らかにならないことに注意しておく.

Caffarelli-Friedman [1] は $f \equiv 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性を示した. 彼らの証明は Aronson-Benilan 評価と比較原理を用いているが, $f \not\equiv 0$ に対する Aronson-Benilan 評価は一般にはわからない. また, (dP) は非局所項を持つことを想定しているため, 比較原理が一般には成り立たない. それゆえ, Caffarelli-Friedman の手法を (dP) に適用するのは難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [2] は, $p > 2$ に対して, p-Laplace 発展方程式

$$(p\text{-L}) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

の弱解 v の勾配が Hölder 連続になることを示した. 彼らの証明には, 比較原理を用いていないことに注意しておく. $n = 1$ のとき, $u = |\nabla v|^2$ とおくと, u は $f \equiv 0$, $\alpha = \frac{p}{2}$ に対する (dP) の解となることがわかる. そのため, 彼らの手法は (dP) に対して適用できると考えられる. 実際, DiBenedetto-Friedman は $f \equiv 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性を示した. 彼らは $f \not\equiv 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性も考察しており, $p > n$ に対し, $f \in L^\infty(0,\infty\,;\, L^p(\mathbb{R}^n))$ であれば, 解が Hölder 連続になると主張しているが, 証明は与えられていないようである. 我々は, 彼らの証明を拡張し, より広い関数空間に属する外力に対して, (dP) の解の Hölder 連続性を示すとともに, 解の Hölder 評価を得た.

L^p 空間より広い関数空間である, 弱 L^p 空間を導入する:

定義 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p > 2$ に対し, $f \in L^p_w(\Omega)$ であるとは, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$ かつ

$$\|f\|^2_{L^p_w(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\, \text{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2\, dx < \infty$$

であるときをいう.

注意 2.2. 弱 L^p 空間は分布関数 $\mu_{|f|}(\lambda); = |\{x \in \Omega \,:\, |f(x)| > \lambda\}|$ を用いて

$$L^p_w(\Omega) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,:\, \sup_{\rho > 0} \lambda^{\frac{1}{p}} \mu_{|f|}(\lambda) < \infty\}$$

で定義できることが知られている. $p > 2$ のとき, 我々の定義と分布関数を用いた定義は同値となる. 実際, $c_0 > 0$ が存在して,

$$c_0 \|f\|_{L^p_w(\Omega)} \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p_w(\Omega)}$$

が成り立つ.

定理を述べるために, 記号

$$A_p := \sup_{a \in \mathbb{R}^n,\, r \le 1} \|f\|_{L^\infty(0,\infty\,:\,L^p_w(B_r(a)))}$$

を導入する.

定理 2.3. u を有界で非負な (dP) の弱解とする. ある $p > n$ に対して $A_p < \infty$ を仮定する. このとき, n, α, p にのみ依存する定数 $C, \sigma > 0$ が存在して,

$$|u(t,x) - u(s,y)| \le C(\|u\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} + A_p)(\|u\|^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma) \tag{2.1}$$

が (t,x), $(s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

注意 2.4. 熱方程式である, $\alpha = 1$ のとき, (2.1) はよく知られた熱方程式の解に対する Hölder 評価となっている. そのため, 評価式 (2.1) は多孔質媒質方程式の解に対する Hölder 評価と考えることができる.

定理 2.3 を使うと, 定理 1.2 が示せる. 実際 $|y|^\gamma u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ から, $yv \in L^\infty(0,\infty\,;\,L^\gamma(\mathbb{R}^n))$ が従う. $v\nabla\phi \in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ より, $yv + v\nabla\phi$ は空間局所一様に $L^\infty(0,\infty\,;\,L^\gamma(\mathbb{R}^n))$ に属するため, $\gamma > n$ より v は時空間一様に Hölder 連続になることがわかる. Ogawa [4] の結果より, $\|v(s) - U\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ が $t \to \infty$ のとき, 指数的オーダーで収束することがわかるので, (1.3) から, (dKS) の解 u が L^1 空間において, 代数的オーダーで Barenblatt 解に収束することがわかる.

References

[1] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n-dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 361–391.

[2] DiBenedetto, E. and Friedman, A., *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 1–22.

[3] Luckhaus, S. and Sugiyama, Y., *Asymptotic profile with the optimal convergence rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 1279–1297.

[4] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations **21** (2008), 1113–1154.

[5] Sugiyama, Y., *Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems*, Differential Integral Equations **19** (2006), 841–876.

[6] Sugiyama Y. and Kunii, H., *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.