半線形放物型方程式の大域解の存在について

東京理科大学大学院　理学研究科　中村　一樹

本研究では次の半線形放物型方程式の初期値問題について考える.

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{jk}(t,x)\partial_{x_k}u(t,x)) + (u(t,x))^\gamma, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし, $\gamma > 1$, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, $u(t,x)$ は非負値関数とする. また係数 $a_{jk}, (1 \le \forall j, \forall k \le n)$ に関し, 次の (A1)-(A3) を仮定する.

(A1) $a_{jk} \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, $(1 \le \forall j, \forall k \le n)$.
(A2) $a_{jk}(t,x) = a_{kj}(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \ (1 \le \forall j, \forall k \le n)$.
(A3) $^\exists \nu > 0$ に対して, $\nu^{-1}|\xi|^2 \le \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t,x)\xi_j\xi_k \le \nu|\xi|^2, \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

この初期値問題において, $a_{jk}(t,x) = \delta_{jk}$(クロネッカーデルタ) の場合には Weissler[1] で, $\frac{n(\gamma-1)}{2} > 1$ のときに十分小で非負な初期値 ϕ に対して時間大域解の存在が示されている.
(1) から非線形項 u^γ を除いた初期値問題,

$$(2)\quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{jk}(t,x)\partial_{x_k}u(t,x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

は仮定 (A1)-(A3) の下で基本解 $g(t,s;x,y)$ を持ち, 解作用素 $E(t,s)$ を次で定義する.

$$E(t,s)\phi(x) = \int g(t,s;x,y)\phi(y)dy, \quad t > s(\ge 0).$$

このとき, 次の L^p-L^q 評価が成り立つ.

補題

$\phi \in L^q$, $1 < q < p < \infty$ ならば, $t > s(\ge 0)$ となる全ての t に関して,

$$\|E(t,s)\phi\|_p \le (C_1(t-s))^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|\phi\|_q,$$

が成り立つ. ただし, $C_1 > 0$ は n, ν にのみ依存する定数. この解の評価式から Weissler[1] の結果を基に次の定理を得た.

定理

$\gamma > 1$ とし, (A1)-(A3) を仮定する. また n, γ が $\frac{n(\gamma-1)}{2} > 1$ を満たすものとし, 初期値 ϕ に対し, $\phi \in L^{\frac{n(\gamma-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)$ かつ $\phi \ge 0$ とする. このとき n, γ, C_1 と C_2 にのみ依存する正定数 C が存在して, $\|\phi\|_{\frac{n(\gamma-1)}{2}} \le C$ ならば, 初期値問題 (1) に対する非負な時間大域解で, $u \in C([0,\infty); L^{\frac{n(\gamma-1)}{2}})$ を満たすものが一意に存在する.

参考文献

[1] F.B.Weissler, *Existence and Nonexistence of Global Solutions for a Semilinear Heat Equation*, Israel J. Math., **38**, (1981),no1-2, pp29-40