COINCIDENCE DEGREE について

東京理科大学大学院数学専攻　小林 二太

X, Z を Banach 空間, $L : D(L) \subset X \to Z$ を index 0 の線型 Fredholm 作用素, $N : X \to Z$ を必ずしも線型でない写像とする．このとき次のような方程式を考える:

$$Lx = Nx. \tag{1}$$

J. Mawhin は N が L-compact という条件を満たしているときに, 上の方程式の解の存在に関わる (L, N) の coincidence degree という整数量を 1972 年に導入した．$X = Z$, $N = I$ のときは coincidence degree は $L - N$ の Leray-Schauder 写像度と一致する．

(1) の例として次のような自励系 Floquet 境界値問題を取り上げる (C は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像).

$$x' = f(x), \quad Cx(0) = C(T), \tag{2}$$

ただし, $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続．文献 [1] では $C = I$ のとき, $C^{\#} = \{x \in C([0,T], \mathbb{R}^n) \mid x(0) = x(T)\}$ とおき, $D(L) = C^{\#} \cap C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, $L \colon D(L) \subset C^{\#} \to C([0,T], \mathbb{R}^n)$ を $x \mapsto x'$ と定め, $N \colon C^{\#} \to C^{\#}$ を $x \mapsto f(x(\cdot))$ と定めている．このとき, 問題 (2) は $C^{\#}$ 内の抽象問題 $Lx = Nx$ と表される．文献 [1] ではこのときの coincidence degree の具体的な表現が与えられているが, $C \neq I$ の場合は何も与えられていない．そこで本研究では, 一般の C に対しても coincidence degree の具体的な表現を次のようにして与えた．

$D(\widetilde{L}) = C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{L} \colon D(\widetilde{L}) \subset C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^n$ を $x \mapsto (x', x(T) - Cx(0))$ と定め, $\widetilde{N} \colon C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^n$ を $x \mapsto (f(x(\cdot)), 0)$ と定める．このとき, 問題 (2) は $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ 内の抽象問題 $\widetilde{L}x = \widetilde{N}x$ と表される．この一般の場合に $(\widetilde{L}, \widetilde{N})$ の coincidence degree の表現が得られた．ただし, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(I - C) \oplus \mathcal{R}(I - C)$ のときのみ, $d_L(\widetilde{L} - \widetilde{N}, \widetilde{\Omega})$ は次のように表現される:

$$d_L(\widetilde{L} - \widetilde{N}, \widetilde{\Omega}) = d_{LS}(I - M, \widetilde{\Omega}, 0).$$

ただし $\widetilde{\Omega} \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ は $\widetilde{L}x = \widetilde{N}x$ が $\partial\widetilde{\Omega}$ 上に解を持たないような有界開集合, d_{LS} は Leray-Schauder 写像度, P は $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(I - C) \oplus \mathcal{R}(I - C)$ の分解に関する射影 $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Ker}(I - C)$. そして,

$$\begin{aligned}(Mx)(t) = \int_0^t (f \circ x)(s)ds + P(\overline{x}) - P(\int_0^T (f \circ x)(s)ds) - P(\frac{1}{T}\int_0^T (T - s)(f \circ x)(s)ds) \\ -((I - C)|_{\mathcal{R}(I-C)})^{-1}(I - P)\int_0^T (f \circ x)(s)ds.\end{aligned}$$

特に $C = I$ のとき, この coincidence degree は, ある条件下では, $C^{\#}$で考えられた文献 [1] の coincidence degree と一致することが確かめられた．

定理 1 $n \geq 2$ で, $\widetilde{\Omega} = \{x \in C([0,T], \mathbb{R}^n) \mid \|x\| < R\}$ (R:十分大) とする．さらに, $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) \neq 0$ が存在すれば, $\Omega = \widetilde{\Omega} \cap C^{\#}$ に対して次が成立する:

$$d_L(\widetilde{L} - \widetilde{N}, \widetilde{\Omega}) = d_L(L - N, \Omega).$$

さらに $C = I$ のときは J. Mawhin は (2) の S^1-同変性に着目して, 次の定理を与えた．

定理 2 ([2]**)** (2) が $\partial\Omega$ 上に解を持たないような有界開集合 $\Omega \subset C^{\#}$ が存在するとき, 次が成立する:

$$d_L(L - N, \Omega) = (-1)^n d_B(f, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0).$$

ただし, $d_L(L - N, \Omega)$ は coincidence degree, $d_B(f, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0)$ は Brouwer 写像度.

文献 [2] におけるこの定理の証明は非常に簡略化されていたので, 本研究では細部を補充して整理した．また, 証明の中で用いられている遅れを持つ方程式に関する結果に, 部分的ではあるが, 作用素半群の立場からの別証明を与えた．後者についてより詳しくは以下のようになる．

$C = C([-1,0], \mathbb{R}^n)$ とし, ノルムは $\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-1,0]} |\phi(\theta)|$ を考える．$x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ に対して, $x_t \in C$, $t \in [0,\infty)$ を, $x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-1,0]$ と定める．また, $D : C \to \mathbb{R}^n$ を次のような連続線型作用素とする：

$$D\phi = \phi(0) - \int_{-1}^0 [d\mu(\theta)]\phi(\theta).$$

ただし, μ は $\mathrm{Var}_{[-s,0]}\mu \to 0$ $(s \to 0)$ を満たし, さらに singular part を持たないとする．このとき, 次の方程式

$$Dy_t = 0 \qquad t \geq 0 \qquad y_0 = \psi \in C_D = \{\phi \in C \mid D\phi = 0\}$$

の解の存在が問題となり, 文献 [2] では不動点定理から局所解の存在を示し, 大域解の存在を得ていた．本研究では, $d\mu(\theta) = f(\theta)d\theta$, ただし $f(\theta) = (f_{ij}(\theta))_{ij}$ が $f_{ij} \in C^1([-1,0], \mathbb{R})$ をみたす場合について, 半群理論の生成定理で解の存在を示した．

参考文献

[1] J. Mawhin, *Topological Fixed Point Theory And Nonlinear Differential Equations*, Handbook of Topological Fixed Point Theory (2005), 867-904.

[2] Th. Bartsch and J. Mawhin, *The Leray-Schauder degree of S^1-equivariant operators associated to autonomous neutral equations in spaces of periodic functions*, J.Differential Equations **92** (1991), 90-99.