群対称性と単純固有空間に伴う分岐

数学専攻　齋藤 正和

0．Introduction

座屈，ドームの積雪による破壊，熱対流のパターン形成など，物理では様々な分岐現象が起きている．数学的には，X: Banach 空間，$F\colon \mathbb{R}\times X \longrightarrow X$ は $F(\lambda,0)=0 \quad (\forall\lambda\in\mathbb{R})$ とするとき，$(\lambda^*,0)$ の任意の近傍に $F=0$ の非自明解 $(\lambda,x)(x\neq 0)$ が存在するとき，$F=0$ は $(\lambda^*,0)$ で分岐するという．

対称性を持つ分岐現象は，ある群 G の X 上への表現 $G\ni g\longmapsto T_g\in\mathcal{L}(X)$ に対して，F が同変，つまり $F(\lambda,T_g x)=T_g F(\lambda,x) \quad (\forall g\in G)$ となることで表される．このとき，$F(\lambda,x)$ の分岐が G の作用により，かなり統制されることが知られており，多くの現象の解析に用いられている．

本論文では，特に最も簡単な群である $\mathbb{Z}_2$ についての同変性を持つときの分岐について，基本的な事柄を研究した．

1．$\mathbb{Z}_2$ 同変性と分岐

$\mathbb{Z}_2$ の X への表現を与えることは，$\tau^2=I$ となる $\tau\in\mathcal{L}(X)$ を与えることと同値となる．このとき，$X_1=\{x\in X|\tau x=x\}$，$X_2=\{x\in X|\tau x=-x\}$ とすると，X_1,X_2 は τ-不変閉部分空間で，$X=X_1\oplus X_2$ となる．

以下において，滑らかな写像 $F\colon\mathbb{R}\times X\longrightarrow X$ と，$\tau\in\mathcal{L}(X)$ で定まる $\mathbb{Z}_2$ の X 上への表現が与えられているとする．更に，$F(\lambda,0)=0 \quad (\forall\lambda\in\mathbb{R})$ で，F はこの表現に対して同変，即ち $F(\lambda,\tau x)=\tau F(\lambda,x) \quad (\forall(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times X)$ が成り立つとする．このとき，$x\in X_i$ ならば $F(\lambda,x)\in X_i$ $(i=1,2)$ となるので，$F^i\colon\mathbb{R}\times X_i\longrightarrow X_i$ $(i=1,2)$ が $x\longmapsto F(\lambda,x)$ によって定義される．

F の分岐について，F が C^2 級の時，Crandall-Rabinowitz の定理により，$(\lambda^*,0)\in\mathbb{R}\times X$ が次の条件 $(C1)\sim(C3)$ の下で分岐点となることが知られている．

$(C1)$　$\dim\operatorname{Ker}F_u(\lambda^*,0)=1$，　$(C2)$　$\operatorname{codim}\operatorname{Ran}F_u(\lambda^*,0)=1$,
$(C3)$　$\operatorname{Ker}F_u(\lambda^*,0)\ni\phi_0\ (\neq 0)$ に対して　$F_{u\lambda}(\lambda^*,0)[\phi_0]\notin\operatorname{Ran}F_u(\lambda^*,0)$.

ここで，次の問題が考えられる．

問題.　$F=0$ が $(\lambda^*,0)$ で $(C1)$ かつ $(C2)$ を満たすならば，$F^1=0$ または $F^2=0$ が $(\lambda^*,0)$ で $(C1)$ かつ $(C2)$ を満たすか？

一般的には F が $(C1)$ かつ $(C2)$ を満たしていても，F^1 が $(C1)$ かつ $(C2)$ を満たす，または F^2 が $(C1)$ かつ $(C2)$ を満たすことにはならないことを示した．しかし，次の命題が成り立つ．

命題.　次の (1) または (2) が成立するならば，上の問題の答えは肯定的である．

(1)　$\dim X_1<\infty$ または $\dim X_2<\infty$.
(2)　F^1 が index 0 の Fredholm 作用素であるか，F^2 が index 0 の Fredholm 作用素.

更に F に $(C3)$ の条件を付け加えると，次の定理が成り立つ．

定理.

$$F \text{ が } (\lambda^*,0) \text{ で } (C1)\sim(C3) \text{ を満たす} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} F^1\text{が } (\lambda^*,0) \text{ で } (C1)\sim(C3) \text{ を満たす,} \\ \qquad \text{もしくは} \\ F^2\text{が } (\lambda^*,0) \text{ で } (C1)\sim(C3) \text{ を満たす.} \end{cases}$$

2．具体例の計算

Crandall-Rabinowitz の定理と上記の定理により，F が $(\lambda^*,0)$ で $(C1)\sim(C3)$ を満たしているとき，$F^1=0$ または $F^2=0$ の解のどちらか一方が $(\lambda^*,0)$ で分岐する．$F^1=0$ が分岐する場合は対称性保存の分岐が起こり，$F^2=0$ が分岐する場合は対称性破壊分岐が起こることを意味する．

本論文では $\lambda\in\mathbb{R}$ をパラメータとする常微分方程式の境界値問題 $(k\in\mathbb{N})$

$$(E)\qquad \begin{cases} -u''=\lambda u+u^k \\ u(-1)=u(1)=0 \end{cases}$$

に対して，上記の一般論を用いて，各分岐点での分岐が対称性保存か破壊かを判定し，更に詳しい分岐状態を調べた．