Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems

石田 祥子
(東京理科大学大学院・理)

次の準線形退化 Keller-Segel 系の初期値問題について考える:

$$\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u^m - u^{q-1}\nabla v) & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ \tau\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ \tau v(x,0) = \tau v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $N \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $q \geq 2$, $\tau = 1$ とし, u_0, v_0 は以下を満たすものとする:

$$(1) \qquad 0 \leq u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ \Delta v_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)\ (\exists\, p_0 \gg 1).$$

本講演では, $\tau = 1$ の場合の (KS) の大域的弱解 (下記参照) の存在について考える.

定義. $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ で定義された非負値関数の組 (u,v) で次の (a)〜(c) を満たすものを (KS) の $[0,T)$ 上の**弱解** ($T > 0$ を任意に選べるとき**大域的弱解**) であるという:

(a) $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^N))$ $(\forall\, p \geq 1)$, $u^m \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^N))$, $v \in L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}^N))$,

(b) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^m \cdot \nabla\varphi - u^{q-1}\nabla v \cdot \nabla\varphi - u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dxdt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \quad (\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T)))$,

(c) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v \cdot \nabla\varphi + v\varphi - u\varphi - \tau v\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dxdt = \tau\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \quad (\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T)))$.

(KS) で $m = 1$ (線形拡散) の場合は多くの研究結果が報告されている. 一方, $m > 1$ (準線形退化拡散) の場合には半線形理論を適用できないためにその解析が困難を極め, 先行研究は少ない. (KS) の大域的弱解の存在については以下の結果が知られている (Sugiyama [**2**] ($q = 2$), Sugiyama-Kunii [**1**] ($q \geq 2$)):

(i) $\tau = 1$, $q \leq m$ のとき (KS) は大域的弱解をもつ.

(ii) $\tau = 0$, $q < m + \frac{2}{N}$ のとき (KS) は大域的弱解をもつ.

(iii) $\tau = 0$, $q \geq m + \frac{2}{N}$ のとき $\|u_0\|_{L^{\frac{N(q-m)}{2}}}$ が十分小さければ, (KS) は大域的弱解をもつ.

既存の結果では, $\tau = 1$ の場合と $\tau = 0$ の場合とで, 初期値の大きさによらずに (KS) の大域的弱解が存在するための q に対する条件に "$\frac{2}{N}$ のずれ" が生じていた (上記の (i) と (ii) を比較せよ). 本講演では, そのずれを解消し, [**1**, Theorem 1] 及び [**2**, Theorem 1] の改良に成功したことを報告する.

主定理.

$N \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $q \geq 2$, $\tau = 1$, $T > 0$ とする. u_0, v_0 は (1) を満たすものとし, m, q に対して

$$(2) \qquad q < m + \frac{2}{N}$$

を仮定する. そのとき (KS) の $[0,T)$ 上の弱解 (大域的弱解) (u,v) が存在する.

条件 (2) を q について解いた臨界指数は, **藤田指数**の一般化である $q = m + \frac{2}{N}$ と一致しており, 上の主定理は初期値の大きさによらない (KS) の大域的弱解の存在に関して最良の結果であると考えられる.

参考文献

[1] Y. Sugiyama, H. Kunii, *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.

[2] Y. Sugiyama, *Time global existence and asymptotic behavior of solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis*, Differential Integral Equations **20** (2007), 133–180.