ポテンシャル項をもつ2階半線形双曲型方程式の解の爆発について

東京理科大学大学院 理学研究科 鈴木 祐介

次の2階半線形双曲型方程式に対する Cauchy 問題の解の爆発について考える.

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + V(x)u = |u|^p, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし, $n \geq 3,\ 1 < p < \dfrac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)}$ とする. さらに, $V,\ a_{jk}\,(1 \leq j,k \leq n)$ は次を満たすと仮定する.

仮定 (A) $V \in B^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n),\ V \geq 0,\ a_{jk} \in B^\infty(\mathbb{R}^n),\ a_{jk}(x) = a_{kj}(x),$

$$^\exists\nu \in (0,1];\ \nu^2|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \leq \nu^{-2}|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

仮定 (B) G を $\dfrac{\partial g}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}\dfrac{\partial g}{\partial x_k}\Big) + Vg = 0$ の基本解,

G_0 を $\dfrac{\partial g}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}\dfrac{\partial g}{\partial x_k}\Big) = 0$ の基本解とする. このとき, 次が成り立つとする.

$$\begin{aligned} &\frac{C_1^{-1}}{(t-s)^{n/2}}\exp\Big\{-C_2^{-1}\frac{|x-y|^2}{t-s}\Big\} \leq C_3^{-1}G_0(x,t;y,s) \\ &\leq G(x,t;y,s) \leq C_3 G_0(x,t;y,s) \leq \frac{C_1}{(t-s)^{n/2}}\exp\Big\{-C_2\frac{|x-y|^2}{t-s}\Big\} \quad (t > s). \end{aligned}$$

ここで, C_1, C_2, C_3 はある正定数である.

仮定 (C) $^\exists C_4 > 0,\ ^\exists\mu_0 \in C^2(\mathbb{R}^n);\ \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}\dfrac{\partial \mu_0}{\partial x_k}\Big) = \mu_0,\ 0 < \mu_0(x) \leq C_4(1+|x|)^{-\frac{n-1}{2}}e^{\gamma|x|}.$

ただし, γ は**仮定 (A)** の ν に対して, $0 < \gamma \leq \nu$ を満たすものとする.

[1] において Borislav T. Yordanov と Qi S. Zhang は, ある正定数 a, b が存在して,

$$\begin{cases} \Delta\lambda_0 - V\lambda_0 = 0,\ a^{-1} \leq \lambda_0(x) \leq a, \\ \Delta\lambda_1 - V\lambda_1 = \lambda_1,\ 0 < \lambda_1(x) \leq b(1+|x|)^{-\frac{n-1}{2}}e^{|x|} \end{cases}$$

を満たす $\lambda_0, \lambda_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ を用いることで, (CP) における $a_{jk} = \delta_{jk}$(クロネッカーのデルタ) の場合の解の爆発を示している. そこで, **(A)**,**(B)**,**(C)** を仮定することで $a_{jk} = \delta_{jk}$ の場合の λ_0, λ_1 と同様の性質を持ったものを (CP) の場合で構成することにより次の結果を得た.

定理

初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は $u_0(x) \geq 0,\ u_1(x) \geq 0,\ u_0(x) = u_1(x) = 0 \ \ (|x| > R)$ を満たし,
$V, a_{jk}\,(1 \leq j,k \leq n)$ は仮定 **(A)**,**(B)**,**(C)** を満たすとする.
さらに, (CP) の時間局所解, すなわち, ある $T > 0$ に対して,

$$(\star) \qquad u \in C([0,T), H^1(\mathbb{R}^n)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T), L^2(\mathbb{R}^n)),\ \mathrm{supp}\Big(u, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) \subset \{(t,x) : |x| \leq \nu^{-1}t + R\}$$

を満たす (CP) の解が存在すると仮定する. このとき, (CP) の解 $u(t,x)$ は爆発する. ここで, (CP) の解 $u(t,x)$ が爆発するとは, $(\star)$ を満たす (CP) の解 $u(t,x)$ が存在する時刻 T の上限を, $T^*(u_0,u_1)$ と表したとき, $T^*(u_0,u_1) < \infty$ となることをいう.

参考文献

[1] Borislav T. Yordanov and Qi S. Zhang, *Finite time blow up for wave equations with a potential*, SIAM J. MATH.ANAL. VOL. 36, No. 5, pp. 1426-1433 (2005)