ソボレフ超臨界の非線形項を持つ楕円型方程式の特異解の存在と一意性について *

菊池 弘明 (津田塾大学学芸学部数学科)

次の方程式について考える:

$$
\begin{cases}
-\Delta u + |x|^2 u - \lambda u - |u|^{p-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, & (1) \\
u(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, & (2) \\
u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty. & (3)
\end{cases}
$$

ここで, $d \geq 3, \lambda > 0$ であり, $p > 1$ とする. ここで, Li–Ni [7] により, u が方程式 (1)–(3) の解ならば, u は球対称であり, さらに, $r = |x| > 0$ に関して, 単調減少であることに注意する.

この講演では, $p > 2^* - 1$ のときに, ある $\lambda_* > 0$ に対して, $\lim_{x \to 0} U_{\lambda_*}(x) = \infty$ となる方程式 (1)–(3) の解 U_{λ_*} について考察する. ここで, 2^* はソボレフの臨界指数, つまり, $2^* = 2d/(d-2)$ である.

主結果を述べる前に, 何故原点で特異性を持つような解を考えるのかを述べたい. この研究の動機は, 方程式 (1)–(3) の解の多重性にある. Hirose–Ohta [5, 6] により, $1 < p < 2^* - 1$ のときには, $\lambda < \lambda_1$ ならば, 方程式 (1)–(3) の解 $u \in \Sigma$ は一意的に存在することが知られている [1]. ここで, $\lambda_1 > 0$ は $-\Delta + |x|^2$ の第 1 固有値であり,

$$
\Sigma = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) \mid |x| u \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.
$$

である.

しかしながら, $p > 2^* - 1$ においては, 上の結果のように解の一意性が成り立たないことを示唆する数値計算の結果がある. 詳しく述べると, HadjSelem [3] は, $d = 3$ で $p = 5.4, 6.8$ のときは, ある $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対して, 方程式 (1)–(3) の

---

*この講演は, Fouad HadjSelem 氏 (Blaise Pascal Univeristy) と Juncheng Wei 氏 (Chinese Univeristy of Hong Kong) との共同研究に基づく

[1] (1) に λ_1 に対応する固有関数 $e^{\frac{|x|^2}{2}}$ を掛けて積分することにより, $\lambda \geq \lambda_1$ ならば, 方程式 (1)–(3) の解は存在しないことが分かる

解が多数存在するような分岐のダイアグラムを描いた．ここで, $d=3$ のときは, $2^*-1=5$ であることに注意する．この現象に対して厳密な証明を与えることが最終的な目標である．

上で述べた現象は, 方程式 (1)–(3) によく似た次の方程式については厳密に証明されている:

$$\begin{cases} -\Delta v - \nu v - |v|^{p-1}v = 0, \quad x \in B, & (4) \\ v(x) > 0, \quad x \in B, & (5) \\ v = 0, \quad x \in \partial B. & (6) \end{cases}$$

ここで, $\nu > 0, p > 1$ であり, $B = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\right\}$ である．具体的には, Dolbeaut–Flores [1] と Guo–Wei [2] は, $2^* - 1 < p < p_{\mathrm{JL}}$ のとき, ある $\nu_* > 0$ が存在して, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $|\nu-\nu_*| > 0$ が十分小さければ, 方程式 (4)–(6) は少なくとも k 個の異なる解を持つことをそれぞれ独立に示した．ここで, p_{JL} は Joseph-Lundgren の指数と呼ばれるもので, 次で与えられる:

$$p_{\mathrm{JL}} := \begin{cases} \infty & \text{if } 2 \le d \le 10, \\ \frac{(d-2)^2-4d+8\sqrt{d-1}}{(d-2)(d-10)} & \text{if } d \ge 11. \end{cases}$$

さらに, Guo–Wei [2] は, $p \ge p_{\mathrm{JL}}$ の場合は, 任意の $\nu \in (0,\infty)$ に対して, (4)–(6) は高々有限個の解しか持たないことを示した．

上で述べた, $2^*-1 < p < p_{\mathrm{JL}}$ の場合の 結果において, $\mu = \mu_*$ 近くでの解析が重要な役割を果たす．実は, $\mu=\mu_*$ では以下のような解があることを Merle–Peletier [8] は示した．

定理 1 (Merle–Peletier [8])**.** *$p > 2^*-1$ とする．このとき, ある $\mu_* > 0$ が唯一つ存在して, $\mu = \mu_*$ のとき, (4)–(6) は*

$$V_{\mu_*} = A|x|^{-\frac{2}{p-1}}\left\{1 - \mu_* B|x|^2 + o(|x|^2)\right\} \qquad as\ x \to 0$$

となる解 $V_{\mu_*} \in H_0^1(B_1)$ を持つ．ここで, 定数 A, B は以下で与えられるものである:

$$A = \left\{\frac{2}{p-1}(d-2-\frac{2}{p-1})\right\}^{\frac{1}{p-1}}, \quad B = \left\{4(d-1-\frac{3}{p-1})\right\}^{-1}. \tag{7}$$

そこで, 方程式 (1)-(3) に対しても, 同様の結果が得られないかどうかを調べることには価値があるように思われる．得られた結果は以下の通りである:

定理 2. $p > 2^* - 1$ とする．このとき，ある $\lambda_* > 0$ が唯一つ存在して，$\lambda = \lambda_*$ のとき，(1)–(3) は

$$U_{\lambda_*} = A|x|^{-\frac{2}{p-1}}\left\{1 - \lambda_* B|x|^2 + o(|x|^2)\right\} \qquad as\ x \to 0$$

となる解 $U_{\lambda_*} \in \Sigma$ をもつ．ここで，A, B は (7) で与えられたものである．

次の定理を述べる前に，方程式 (1)-(3) の分岐解に関する結果を紹介したい．[4] において，$p > 2^* - 1$ のときに，大域的な分岐の存在することが知られている．具体的には，

$$\mathcal{C}_1 = \{(\lambda, u_\lambda) \in (0, \lambda_1) \times \Sigma \mid u_\lambda \text{ sol. to (1)–(3)}\} \tag{8}$$

となる空でない $\mathcal{C}_1 \subset (0, \lambda_1) \times \Sigma$ が存在して，次を満たす:

$$\sup\left\{\|u_\lambda\|_{L^\infty} \mid (\lambda, u_\lambda) \in \mathcal{C}_1\right\} = \infty.$$

次の定理は，$\|u_\lambda\|_{L^\infty} \to \infty$ のときの漸近的な振る舞いに関するものである:

定理 3. $p > 2^* - 1$ とする．$\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathcal{C}_1$ を $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^\infty} = \infty$ を満たすものとする．このとき，

(i) $\lambda_n \to \lambda_*\ as\ n \to \infty,$

(ii) $u_n \to U_{\lambda_*}\ in\ \Sigma\ as\ n \to \infty$

となる．ここで，$\lambda_* > 0, U_{\lambda_*} \in \Sigma$ は定理 *2* で与えられたものである．

定理 3 は Merle–Peletier [8] と同様に得られるので，定理 2 の証明の概略を講演では説明したい．定理 2 の証明も基本的には Merle–Peletier [8] の手法を用いる．しかしながら，方程式 (4)–(6) では，簡単なスケーリングを考えることで定理 1 の ν_* の存在と一意性を同時に得ることが出来るが，ここで考えている (1)–(3) はポテンシャル項があることが原因して，$\lambda_* > 0$ が一意的であることを証明するのに，Merle–Peletier [8] とは別の手法を用いなければいけない．ここでは，Wang [9] や Guo–Wei [2] の手法を用いることで，上の困難を解決出来ることを説明したい．

また，時間に余裕があれば，$p > 2^* - 1$ の場合における，分岐解の Morse index についても話したい．

参考文献

[1] J. Dolbeault and I. Flores, *Geometry of phase space and solutions of semilinear elliptic equations in a ball*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), 4073–4087.

[2] Z. Guo and J. Wei, *Global solution branch and Morse index estimates of a semilinear elliptic equation with super-critical exponent*, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), 4777–4799.

[3] F. HadjSelem, *Radial solutions with prescribed numbers of zeros for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential*, Nonlinearity, **24** (2011), 1795–1819.

[4] F. HadjSelem and H. Kikuchi, *Existence and non-existence of solution for semilinear elliptic equation with harmonic potential and Sobolev critical/supercritical nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **387** (2012), 746–754.

[5] M. Hirose and M. Ohta, *Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential*, J. Differential Equations, **178** (2002), 519–540.

[6] M. Hirose and M. Ohta, *Uniqueness of positive solutions to scalar field equations with harmonic potential*, Funkcial. Ekvac., **50** (2007), 67–100.

[7] Y. Li and W.-M. Ni, *Radial symmetry of positive solution of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 1043–1054.

[8] F. Merle and L. A. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth*, Proceeding of the Royal Society of Edingburgh, **118A** (1991), 49–62.

[9] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), 549–590.