エネルギー臨界 p 調和方程式系の正則性とその応用

三沢　正史, 熊本大学自然科学研究科 [(*)]

次のような時間発展 p 調和方程式系

$$(0.1)\ \partial_t u^i - \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} D_\alpha\left((|Du|_g)^{p-2} g^{\alpha\beta}(z,u) D_\beta u^i\right) = F^i(z,u,Du), \quad i=1,\ldots,n,$$

を時空領域 $Q=(0,T)\times\Omega$ において考える. ここで, $T>0$, Ω は $\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$, の有界領域, $p\geq 2$, 未知関数 $u=(u^i)$, $i=1,\ldots,n$, は Q 上定義された $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, のベクトル値関数である. $D_\alpha=\partial/\partial x_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,m$, $Du=(D_\alpha u^i)$ は関数 u の導写像, $(|Du|_g)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{\alpha,\beta=1}^m g^{\alpha\beta}(z,u)D_\alpha u^i D_\beta u^i$ はそのノルムを表す. 係数 $g^{\alpha\beta}(z,u): \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\alpha,\beta=1,\ldots,m$, は, 一様楕円型, 有界かつヘルダー連続であるとする. 低階項 $F^i(z,u,P)$ は $\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}$ 上の実数値関数であり, 変数 $z\in Q$ について可測, 変数 $(u,P)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}$ について連続であるとする. また, 変数 P について臨界増大とする (以下参照).

(0.1) のタイプの方程式系は, 幾何学, 物理学においてよく知られている調和写像と関係している. 実際, Dirichlet エネルギーの臨界写像が調和写像であるが, p エネルギーの臨界写像は p 調和写像と呼ばれている. この発表では, 時間発展 p 調和方程式系 (0.1) のエネルギークラスの弱解の正則性について考える. エネルギークラスの弱解は一般に特異性を有してよい. 実際, (0.1) の両辺の解の次数によって, 一般の弱解に対して, 先見的にエネルギーの有界性は得られない. この意味で (0.1) はエネルギー臨界の方程式系である. 結局, 弱解のエネルギー有界性を得るためには, なんらかの解の小ささ, あるいは非線形項の cancelation のような特別な性質が必要となる. ここでは, 解の L^∞ ノルムの小ささを仮定して, 弱解が部分的に正則となることを見る. このとき与える正則性条件は幾何学的に自然なスケールで与えられる. また, 解の小ささは幾何学的に自然なものであることを見る. この正則性定理を応用して, 高次元空間における定平均曲率曲面の時間発展方程式系の小さい弱解が正則となることを見る.

係数関数 $g^{\alpha\beta}(z,u)$ は, 一様楕円型かつ有界, すなわちある正定数 γ が存在して, 不等式

$$(0.2)\qquad \gamma^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g^{\alpha\beta}(z,u)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \gamma|\xi|^2$$

が任意の $\xi\in\mathbb{R}^m$ に対して成り立つ, さらに, 次の意味で連続であるとする. ある正定数 C と $\beta<1$ が存在して, 不等式

$$(0.3)\qquad \left|g^{\alpha\beta}(t,x_1,u_1)-g^{\alpha\beta}(t,x_0,u_0)\right| \leq C\left(|x_1-x_0|+|u_1-u_0|\right)^\beta$$

が任意の $t>0$, $x_0, x_1\in\mathbb{R}^m$ および $u_0, u_1\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ. 低階項の関数 $F^i(z,u,P)$ は Carathéodory 関数であり, 次の増大条件を満たすとする

$$(0.4)\qquad |F(z,P)| \leq \Gamma\left(|P|^p+|f|^{p-1}\right),$$

ここで関数 f は, q 乗可積分とする, $q>(p-1)(m+p)/p$.

[(*)] 「神楽坂解析セミナー」於 東京理科大学理, 平成 24 年 7 月 28 日

(0.1) の典型的な例は, 次のような p エネルギー汎関数の熱流 (勾配流) である

$$E_p(u) = \int_\Omega \tfrac{1}{p} \left(g^{\alpha\beta}(x,\,u) D_\alpha u \cdot D_\beta u\right)^{p/2} dx. \tag{0.5}$$

実際, (0.5) の L^2 勾配流を記述する方程式系は, 係数を $g^{\alpha\beta}(x,\,u)$ とし, 低階項を

$$F(x,\,u,\,Du) = -\frac{1}{2}(|Du|_g)^{p-2}\frac{dg^{\alpha\beta}}{du}(x,\,u) D_\alpha u \cdot D_\beta u. \tag{0.6}$$

とする (0.1) である. この方程式系は, 2 つの滑らかなコンパクトリーマン多様体間の p 調和写像の熱流に関係している.

ここでは, 次のような解の小ささを仮定する

$$U := |u|_{\infty,Q} < \frac{\gamma^{-p/2}}{2\Gamma}. \tag{0.7}$$

このとき, 弱解の正則性について, 以下が成り立つ.

Theorem 1 *ある閉部分集合 $\mathcal{S} \subset Q$ と $m,\,p$ と q のみに依存するある正定数 α_1 が存在して, $\mathcal{S}$ の補集合上で弱解 u は, 時空距離 $|t|^{1/p} + |x|$ に関して指数 α_1 ヘルダー連続である. ヘルダー定数は, $m,\,p,\,q,\,\gamma,\,\Gamma,\,|Du|_{p,Q}$ と U にのみ依存する. さらに, m と p にのみ依存する正定数 δ_0 に対して, 解の正則性の除外集合 $\mathcal{S}$ の, 時空距離 $|t|^{1/p} + |x|$ に関する $(m-\delta_0)$ 次元の Hausdorff 測度は零である. $\mathcal{H}^{m-\delta_0}(\mathcal{S}) = 0$.*

時間発展 p 調和方程式系の弱解は, 一般に空間一階導関数までヘルダー連続となるが, (0.1) の小さい弱解の一階導関数はまた, $\mathcal{S}$ の補集合上ヘルダー連続となる.

参考文献

[1] E. Di Benedetto, Degenerate Parabolic Equations, Universitext, New York, NY: Springer-Verlag. xv, 387 (1993).

[2] F. Duzaar, G. Mingione, The $p-$harmonic approximation and the regularity of $p-$harmonic maps, *Calc. Var.* **20**, (2004) 235-256.

[3] M. Giaquinta, M. Struwe, On the partial regularity of weak solutions of nonlinear parabolic systems, *Math. Z.* **179**, (1982) 437-451.

[4] J. Kinnunen, J. L. Lewis, Higher integrability for parabolic systems of $p-$Laplacian type, *Duke Math. J.* **102**(2), (2000) 253-271.

[5] M. Misawa, A Hölder estimate for nonlinear parabolic systems of $p-$Laplacian type, *to appear.*

[6] M. Misawa, Local Hölder regularity of gradients for evolutional $p-$Laplacian systems, *Ann. Mat. Purs Appl. (IV)* **181**, (2002) 389-405.

[7] M. Misawa, Partial regularity results for evolutional $p-$Laplacian systems with natural growth, *Manusc. Math.* **109**, (2002) 419-454.

[8] M. Struwe, On the Hölder continuity of bounded weak solutions of quasilinear parabolic systems, *Manusc. Math.* **35**, (1981) 125-145.