劣2次のポテンシャルを持つシュレディンガー発展作用素のモジュレーション 空間における評価について

伊藤真吾[*] (東京理科大学理学部数学科)

次の時間に依存するシュレディンガー方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = V(t,x)u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ であり，$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．

本講演では，$V(t,x)$ が劣 2 次のポテンシャルの場合に，モジュレーション空間の枠組みで，(1) の解に関するある評価を与える．$V(t,x)$ に対して，以下を仮定する．

仮定 $V(t,x)$ は $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ に属する実数値関数であり，$\rho \le 2$ が存在し，任意の多重指数 α に対して，定数 C_α があって，

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-\alpha} \tag{2}$$

が任意の $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ について成り立つ．

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，f の波束変換 (Wave Packet Transform) $W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi u(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} u(y) e^{-iy\cdot\xi} dy \tag{3}$$

と定義する (Córdoba and C. Fefferman [3])．このとき φ を窓関数と呼ぶ．また，モジュレーション空間は次のように定義される：

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $1 \le p,q \le \infty$ に対して，モジュレーション空間 $M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ をノルム

$$\|f\|_{M_\varphi^{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x,\xi)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

---

[*]本講演は加藤圭一氏（東京理科大学），小林政晴氏（山形大学）との共同研究に基づく．

が有限となる $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体の空間と定義する．

モジュレーション空間は Feichtinger[4] により導入された関数空間で，ここ数年偏微分方程式への応用が発達してきている．Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers [1], Wang-Hudzik [12], Wang-Zhao-Guo [13] らの研究から始まり，近年では，Bényi-Okoudjou [2], Kobayashi-Sugimoto [8], Miyachi-Nicola-Rivetti-Tabacco-Tomita [9], Tomita [10], Wang-Huang [11] など，多くの結果が知られている．

主定理　$1 \le p, q \le \infty$, $T > 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし，$\varphi(t,x) = e^{\frac{1}{2}it\Delta}\varphi_0(x)$ とおく．また，$u(t,x)$ は $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (1) の解とする．

(a) V が (2) を $\rho \le 2$ に対して満たすならば，T, φ_0 に依存する正定数 C が存在して，

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C\|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}} \tag{5}$$

が任意の $t \in [-T, T]$ に対して成り立つ．

(b) V が (2) を $\rho \le 1$ に対して満たすならば，T, φ_0 に依存する正定数 C が存在して，

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C\|u_0\|_{M^{p,q}_{\varphi_0}} \tag{6}$$

が任意の $t \in [-T, T]$ に対して成り立つ．

証明の要点は，都合のよい窓を取ってから，方程式に波束変換を作用させることで，方程式 (1) を 1 階の偏微分方程式に変換することである．これにより，特性曲線の方法を用いて積分方程式に帰着でき，その積分方程式を評価することで，主結果を得ることができる．この手法を用いた結果として，Kato-Kobayashi-Ito [5],[6],[7] がある．

References

[1] Á. Bényi, K. Gröchenig, K. Okoudjou and L.G. Rogers, *Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces*, J. Funct. Anal. 246 (2007), pp. 366–384.

[2] Á. Bényi, K. Okoudjou, *Local well-posedness of nonlinear dispersive equations on modulation spaces*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), pp. 549–558.

[3] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 979–1005.

[4] H. G. Feichtinger, *Modulation spaces on locally compact abelian groups*, in: M. Krishna, R. Radha and S. Thangavelu (Eds.), Wavelets and their Applications, Chennai, India, Allied Publishers, New Delhi, 2003, pp.

99–140, Updated version of a technical report, University of Vienna, 1983.

[5] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications,* to appear in Tohoku math. J.

[6] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator,* SUT J.Math 47 (2011), 175-183.

[7] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Remarks on Wiener Amalgam space type estimates for Schrödinger equation*, To appear.

[8] M. Kobayashi and M. Sugimoto, *The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces*, J. Funct. Anal. 260 (2011), pp. 3189–3208.

[9] A. Miyachi, F. Nicola, S. Rivetti, A. Tabacco and N. Tomita, *Estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), pp. 3869–3883.

[10] N. Tomita, *Unimodular Fourier multipliers on modulation spaces $M^{p,q}$ for $0 < p < 1$.,* Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, 125–131, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B18, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010.

[11] B. Wang and C. Huang, *Frequency-uniform decomposition method for the generalized BO, KdV and NLS equations,* J. Differential Equations 239 (2007), pp. 213–250.

[12] B. Wang and H. Hudzik, *The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data*, J. Differential Equations 232 (2007), pp. 36–73.

[13] B. Wang, L. Zhao and B. Guo, *Isometric decomposition operators, function spaces $E^{\lambda}_{p,q}$ and applications to nonlinear evolution equations*, J. Funct. Anal. 233 (2006), pp. 1–39.