

# ILL-POSEDNESS FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS IN ONE AND TWO SPACE DIMENSIONS

岩淵 司 (中央大学 理工学部)

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題の非適切性について考える.

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = u^2, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

初期値問題 (NLS) の適切性については多くの研究が知られている. 空間次元が  $1 \leq n \leq 5$  の場合には Ginibre-Velo [5], T. Kato [6] により Sobolev 空間  $H^1(\mathbb{R}^n)$  における時間局所適切性が, また  $n = 1, 2, 3$  の場合に Y. Tsutsumi [9] により Lebesgue 空間  $L^2(\mathbb{R}^n)$  における時間局所適切が示されている. (その後  $n = 4$  の場合も Y. Tsutsumi により (NLS) の  $L^2(\mathbb{R}^4)$  時間局所適切性が示されている cf. Cazenave-Weissler [3]). さらに初期条件に対する条件を拡大して負の正則性を持つ Sobolev 空間  $H^s(\mathbb{R}^n)$  において,  $s > -3/4$  のとき  $H^s(\mathbb{R})$ -時間局所適切性が, Kenig-Ponce-Vega [7] により  $n = 1$  で, Colliander-Delort-Kenig-Staffilani [4] により  $n = 2$  でそれぞれ示されている. さらに  $n = 1$  の場合には Bejenaru-Tao [2] により Sobolev 空間  $H^s(\mathbb{R})$  で  $s \geq -1$  ならば時間局所適切,  $s < -1$  ならば時間局所非適切であることが知られている.  $n = 2$  の場合には Bejenaru-De Silva [1] が  $s > -1$  ならば時間局所適切であることを示している.

一般に方程式を不変に保つスケール変換を持つ非線形方程式の時間局所適切性は, そのスケール変換を不変に保つ函数空間が時間局所適切性の限界であることが想定され, 非適切となる函数空間を見出す目安の1つとなる. 初期値問題 (NLS) において, 方程式を満たす函数  $u$  に対してパラメータ  $\lambda > 0$  によつて  $u_\lambda(t, x) := \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x)$  とおけば  $u_\lambda$  も方程式を満たし  $s = \frac{n}{2} - 2$  のとき  $\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s} = \|u(\lambda^2 t)\|_{\dot{H}^s}$  が成立する. ここで  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  は斉次 Sobolev 空間である. 前述の適切性について,  $n = 2$  の場合はスケール変換の限界  $-1$  と初期値問題の解の時間局所適切性が一致しているが,  $n = 1$  の場合にはそうになっていない. この理由を明確にするために,  $n = 1$  の場合に, Besov 空間を導入し Sobolev 空間のスケール  $s = -1$  より精密な時間局所適切性を得ることを目指し,  $n = 2$  では Sobolev 空間  $H^s(\mathbb{R}^2)$  について  $s \leq -1$  の場合を考察する. そして [2] における非適切性より強い非存在の結果を示す.

**定理 1.**  $n = 2, s \leq -1$  とする. このとき,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\phi_N\|_{H^s} = 0$  を満たす初期値の列  $\{\phi_N\}_{N=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $T_N \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$  を満たす時刻の列  $\{T_N\}_{N=1}^\infty$ , および初期値が  $\phi_N$  である (NLS) の解の列  $\{u_N\}_{N=1}^\infty$  が存在し, 以下が成り立つ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u(T_N)\|_{H^s} = \infty.$$

定義(Besov 空間).  $\psi, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  は次を満たす Littlewood-Paley の 2 進単位分解とする.

$$\begin{aligned} \text{supp } \widehat{\psi} &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 2\}, & \text{supp } \widehat{\psi}_0 &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}, \\ \psi_j(x) &:= 2^{nj} \psi_0(2^j x), & \widehat{\psi}(\xi) + \sum_{j \geq 1} \widehat{\psi}_j(\xi) &= 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

このとき  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  に対して Besov 空間  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  のノルムを次で定義する.

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} := \|\psi * u\|_{L^p} + \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (2^{sj} \|\psi_j * u\|_{L^p})^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

定理 2.  $n = 1, q > 2$  とする. このとき,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\phi_N\|_{B_{2,q}^{-1}} = 0$  を満たす初期値の列  $\{\phi_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $T_N \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) なる時刻の列  $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$ , および初期値  $\phi_N$  に対する (NLS) の解の列  $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$  が存在し, 以下が成り立つ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u(T_N)\|_{B_{2,q}^{-1}} = \infty.$$

注意.  $n = 1$  の場合にはスケール臨界指数は  $-3/2$  であるが, 定理 2 により適切と非適切のための臨界指数は  $-1$  でありスケール臨界指数とは異なる.

注意.  $2 < q \leq \infty, s < -1$  のとき次の包含関係が成立する.

$$H^{-1}(\mathbb{R}) = B_{2,2}^{-1}(\mathbb{R}) \subset B_{2,q}^{-1}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R}).$$

Bejenaru-Tao [2] は Sobolev 空間  $H^{-1}(\mathbb{R})$  において時間局所適切性を示したが, 正則性  $s = -1$  の場合には Besov 空間を用いて適切となる空間をより広くすることはできず  $B_{2,q}^{-1}(\mathbb{R})$  ( $q > 2$ ) において非適切となる.  $n = 1$  の場合に, 非適切となる臨界空間がスケール限界空間とずれる理由是非斉次 Sobolev 空間の構造的要因による.

#### REFERENCES

- [1] I. Bejenaru, D. De Silva, *Low regularity solutions for a 2D quadratic nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5805–5830.
- [2] I. Bejenaru, T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228–259.
- [3] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in  $H^s$* , Nonlinear Anal. **14** (1990), no. 10, 807–836.
- [4] J. E. Colliander, J. -M. Delort, C. E. Kenig, G. Staffilani, *Bilinear estimates and applications to 2D NLS*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 8, 3307–3325.
- [5] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations I: The Cauchy problem, II: Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–71.
- [6] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), 113–129.
- [7] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3323–3353.
- [8] N. Kishimoto, *Low-regularity bilinear estimates for a quadratic nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **247** (2009), no. 5, 1397–1439.
- [9] Y. Tsutsumi,  *$L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 1, 115–125.