On the Cauchy problem for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations

新里　智行* (大阪大学大学院理学研究科)

1 Introduction

本公演では, 一般化された Kadomtsev-Petviashvili 方程式（以下, KP 方程式と書く）:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \sigma \partial_x^{-1} \partial_y^2 u = -\partial_x (u^\rho), & (x,y) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$

の Cauchy 問題を考える． ここで $\sigma = 1$ または $\sigma = -1$, $\partial_x^{-1} = \int_{-\infty}^x dx'$. $\rho = 2$, $\sigma = -1$ のときを KPI 方程式, $\rho = 2$, $\sigma = 1$ の時を KPII 方程式と呼び, それぞれ異なった性質を持つ. この方程式は, 水深の浅い領域における水の波を記述する方程式として Kadomtsev と Petviashvili が [2] において提唱した. 今回この方程式に関して, 方程式固有の作用素を用いることによって, 二つの結果が得られたので, これを紹介する.

記号の準備

Sobolev 空間を次のように定義する：

$$\mathbf{H}_p^m = \left\{ \phi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^m} = \left\| \left(1 - \partial_x^2 - \partial_y^2\right)^{\frac{m}{2}} \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\},$$

ここで $m \in \mathbf{R}, 1 \leq p \leq \infty$. 特に $\mathbf{H}^m = \mathbf{H}_2^m$ とする. KP 自由発展群を次のように定義する：

$$\mathcal{U}(t)\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{it\left(\xi^3 - \sigma\eta^2/\xi\right)} \mathcal{F}\phi(t,\xi,\eta)\right)$$

ここで $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換, フーリエ逆変換である. KP 自由発展群を通して, 方程式固有の作用素を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x &= \mathcal{U}(t)\, x\mathcal{U}(-t) = x - t(3\partial_x^2 - \sigma\partial_x^{-2}\partial_y^2), \\ \mathcal{J}_y &= \mathcal{U}(t)\, y\mathcal{U}(-t) = y - 2\sigma t \partial_x^{-1}\partial_y. \end{aligned}$$

*t-niizato@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2　主結果

まず, $\rho \geq 3$ の場合を考える. 時間大域解の存在に関しては次の命題が成り立つ. ここで解は次のような空間で考える：

$$\mathbf{X}_T = \left\{ \phi \in C\left([-T,T]\,;\mathbf{L}^2\right); \|\phi\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\},$$

ここで,

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{-T \leq t \leq T} \left(\left\| \partial_x^{-1} \phi(t) \right\|_{\mathbf{H}^4} + (1+|t|)^{1-\frac{2}{p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{H}^1_p} \right).$$

命題 2.1 初期条件 u_0 が $u_0 \in \mathbf{H}^1_{p'}$, $\partial_x^{-1} u_0 \in \mathbf{H}^4$ を満たすとする. ここで $4 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. この時, ある十分小さい正数 ϵ が存在して, $\|\partial_x^{-1} u_0\|_{\mathbf{H}^4} + \|u_0\|_{\mathbf{H}^1_{p'}} \leq \epsilon$ ならば, *Cauchy*問題 *(1)* は唯一の時間大域解 $u \in \mathbf{X}_\infty$ をもち次を満たす：

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^1_p} \leq \sqrt{\varepsilon}\,(1+|t|)^{-1+\frac{2}{p}}, \left\| \partial_x^{-1} u(t) \right\|_{\mathbf{H}^4} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

さらに初期条件に対して空間に関する重みを仮定すると時間減衰評価が導ける [3].

定理 2.2 u を命題 *2.1* で得られた *Cauchy*問題 *(1)* の解とする. この時 $x \partial_x^i u_0 \in \mathbf{L}^2$ かつ $y^2 \partial_x^i u_0 \in \mathbf{L}^2$ $(i = 0, 1)$ ならば次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C(1+|t|)^{-1} (\log(2+|t|))^\kappa, \\ \|\partial_x u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C(1+|t|)^{-1}. \end{aligned}$$

ここで $\rho = 3$ の時 $\kappa = 1$, $\rho > 3$ の時 $\kappa = 0$.

次に $\rho = 2$ の場合を考える. 時間局所解の存在に関しては次の命題が成り立つ. ただし解は次のような関数空間で考える：

$$\mathbf{Z}_T = \left\{ \phi \in \mathbf{C}\left([0,T]\,;\mathbf{L}^2\right); \|\phi\|_{\mathbf{Z}_T} < \infty \right\},$$

ここで,

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}_T} = \sup_{t \in [0,T]} \left(\left\| \partial_y \partial_x^{-1} \phi \right\|_{\mathbf{H}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \left\| \partial_x^3 \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\| \mathcal{J}_y^2 \partial_x \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathcal{J}_x \partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2} \right).$$

初期条件の属する空間は次のような関数空間とする：

$$\mathbf{Z}_0 = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2; \|\phi\|_{\mathbf{Z}_0} < \infty \right\},$$

ここで,

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}_0} = \left\| \partial_y \partial_x^{-1} \phi \right\|_{\mathbf{H}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \left\| \partial_x^3 \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\| y^2 \partial_x \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} + \|x \partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}.$$

命題 2.3 任意の $u_0 \in \mathbf{Z}_0$ に対し, ある正数 $T(\|u_0\|_{\mathbf{Z}_0})$ が存在して, *Cauchy* 問題 *(1)* の解 $u \in \mathbf{Z}_T$ が一意的に存在する.

この時間局所解の存在時間に関して以下の評価が成り立つ [1]. ここで, 解の最大存在時間を次のように定義する：

$$T^* = \sup\left\{T > 0; \|u\|_{\mathbf{Z}_T} < \infty\right\}.$$

定理 2.4 [1]$u_0 \in \mathbf{Z}_0$, $\|u_0\|_{\mathbf{Z}_0} = \epsilon$ とする. この時, ある正数 ϵ_0, B が存在して, 次の評価が成り立つ：

$$T^* \geq \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \quad for \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

References

[1] N. Hayashi, P.I. Naumkin, and T. Niizato, *Almost global existence of solutions to the Kadomtsev-Petviashvili equations.* Funkcialaj Ekvacioj **55**, 157-168(2012)

[2] B.B. Kadmotsev and V.I. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersive media.* Soviet Phys. Dokl. **15**, 539-541(1970)

[3] T. Niizato, *Large time behavior of solutions for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation.* Differ. Equ. Appl. **3**, 299-308(2011)

[1]この結果は林仲夫教授と P. I. Naumkin 教授との共同研究による