Absence of zero resonances of massless Dirac operators

相場大佑 (学習院大学)

本講演では, $\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{C}^4$-値関数に作用する次の massless Dirac operator を考える.

$$
\begin{aligned}
H &:= \alpha \cdot D + Q(x) \qquad (1)\\
&:= \sum_{j=1}^{4} \alpha_j(-i\partial_{x_j}) + Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

ここで, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は Dirac 行列:

$$
\alpha_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3.
$$

但し, $\mathbf{0}$ は 2×2 の零行列を表すものとし, σ_j $(j = 1, 2, 3)$ は次で定義される Pauli 行列とする.

$$
\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

ポテンシャル $Q(x)$ は 4×4 のエルミート行列値関数であり, 次の条件を満たすとする.

Assumption 1. ある定数 $C > 0$ と $\rho > 1$ が存在して, $Q(x)$ の各成分 $q_{j,k}(x)$ $(j, k = 1, \cdots, 4)$ は,

$$
|q_{j,k}(x)| \le C\langle x\rangle^{-\rho}, \quad \langle x\rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^3,
$$

を満たす.

ここで, massless Dirac 作用素 (1) は電磁場ポテンシャルを持つ Dirac 作用素

$$
\alpha \cdot (D - A(x)) + q(x)I_4 \qquad (2)
$$

の一般化とみることができる．特に, $q(x)=0$ の時は,

$$\alpha\cdot(D-A(x))=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma\cdot(D-A(x))\\ \sigma\cdot(D-A(x)) & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

と書け, 作用素 $\sigma\cdot(D-A(x))$ は Weyl-Dirac 作用素と呼ばれている．

Definition 2. *$f\in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が $Hf=0$ を満たす時, f は H のゼロモードであると言う．また, $f\in L^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が超関数の意味で $Hf=0$ を満たす時, f は H のゼロレゾナンスであると言われる．*

本講演では次の主結果の証明をする．

Theorem 3. *$Q(x)$ は Assumption 1 を満たすとする．$f\in L^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が超関数の意味で $Hf=0$ を満たすならば, 任意の $\mu<1/2$ に対して $\langle x\rangle^\mu f\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が成り立つ．特に, ゼロレゾナンスが存在しないことが分かる．*

Remark 4. *$\langle x\rangle^\mu f\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, $\mu<1/2$ における μ をこれ以上改良することはできない．このことは, Loss-Yau [2] によって構成された Weyl-Dirac 作用素に対するゼロモードを用いることによって示される．*

Saiō-Umeda [3] において, 次が証明されている．Assumption 1 において $\rho>3/2$ とし, ある $0<s\le\min\{3/2,\rho-1\}$ が存在して, $f\in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が超関数の意味で $Hf=0$ を満たすならば $f\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ が成り立つ．主結果 Theorem 3 は, この結果において, $f\in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ を, より弱い条件 (特に, $\rho>1$ に依存していない)$L^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ に, $f\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ を sharp decay estimate $\langle x\rangle^\mu f\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, $\mu<1/2$ に改良したものになっている．

References

[1] A. Jensen and T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Mathematical Journal, 46 (1979), 583-611.

[2] M. Loss and H. T. Yau, Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields III. Zero Energy Bound States of the Pauli Operator. Communications in Mathematical Physics, 104 (1986), 283-290.

[3] Y. Saitō and T. Umeda, The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators. Hokkaido Mathematical Journal, 37 (2008), 363-388.