Hamilton 方程式の周期解の個数について

風間　翔
（東京理科大学大学院・理）

Hamiltonian H を $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$，$2n \times 2n$ 行列 J を

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ I \text{ は } n \times n \text{ 単位行列}$$

で定めると，Hamiltonian System は

$$\text{(HS)} \qquad \dot{z}(t) = J\nabla H(z(t))$$

となる．$\nabla H(z_0) = 0$ となる点 z_0 を (HS) の平衡点と言い，平衡点のまわりを回る微小な周期解の存在については深い研究がある．Weinstein と Moser([2],[3]) はエネルギー値を指定した場合において平衡点のまわりを回る (HS) の周期解の存在とその個数の評価を示しており，Mawhin-Willem([4]) は S^1-index を用いて minimax 理論により変分法的に Weinstein の結果の別証明を与えている．Weinstein-Moser，Mawhin-Willem は $H''(0)$ が positive definite という仮定を課しており，その範囲では得られた周期解の個数の評価は最良である．他方，Bartsch([1]) は正定値という仮定を弱めて $H''(0)$ の符号数が 0 でないという仮定の下で，同様に周期解の個数の評価を得ている．Bartsch の結果を述べるために，Linearized Hamiltonian System

$$\text{(LHS)} \qquad \dot{z}(t) = JH''(0)z(t)$$

については，$JH''(0)$ を生成作用素とする群 $\mathcal{S} := \{e^{tJH''(0)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって，初期値 z_0 に対する解が $z(t) = e^{tJH''(0)}z_0$ と表示されることに注意しておく．

Theorem 1. ([1]) $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ で，$H(0) = 0$，$\nabla H(0) = 0$ とし，$\mathbb{R}^{2n} = E \oplus F$ が $\mathcal{S}$ 不変な部分空間への分解で，$\mathcal{S}$ は E 上では周期 τ_0 であり，F 内には $\{0\}$ 以外に $\mathcal{S}$ の周期 τ_0 の周期軌道は存在しないとする．さらに $E \setminus \{0\}$ には平衡点が存在しないとする．このとき，$H''(0)$ が E 上で定める 2 次形式の符号数 2ν が 0 でないとすると，次のどちらかの主張が成り立つ．

(i) $H^{-1}(0) \setminus \{0\}$ の中に，各 k に対して周期が τ_k である (HS) の周期解の列 $\{x_k\}_k$ で，$k \to \infty$ のとき $x_k \to 0$ かつ $\tau_k \to \tau_0$ となるものが存在する．

(ii) ある $\lambda_0 > 0$ があって，$\lambda \cdot \nu > 0$ かつ $0 < |\lambda| \leq \lambda_0$ を満たす任意の λ に対して $H^{-1}(\lambda)$ 上に (HS) は，周期が τ_0 に近い，少なくとも ν 個の幾何学的に異なる周期解を持つ．これらの解は $\lambda \to 0$ のとき 0 に収束する．

本研究では，第一に Symplectic 変換による 2 次形式の表現行列の簡単化を考察した．$H''(0)$ が正定値のときは $H''(0)$ が対角化可能であり，このことが Weinstein-Moser の結果に関係している．そのため，Bartsch の仮定のような $H''(0)$ が正定値でない場合に対してもどの程度まで簡単化できるのかを考察した．第二に Bartsch の結果の最良性を示した．(HS) が線型な場合は Bartsch の結果の (i) の方が生じる．そのため非線型な場合で (ii) の最良性を示した．また，Bartsch の証明は Conley index や，length という cohomological index，Morse decomposition 等を駆使した変分法的なものであるが，誤った主張や直ちに正当化できない言明を多数含んでいるので，第三に Bartsch の証明を完全にした．

そして，Bartsch は符号数が 0 でないという仮定を課しているが，(LHS) の場合には $JH''(0) = H''(0)J$ という仮定の下では符号数が 0 でも，平衡点のまわりを回る J-不変な軌道を持つ周期解がエネルギー制約下で存在することが容易に分かる．このことから，第四に Hamiltonian が J-不変であるときに各エネルギー曲面上に J-不変な周期軌道が存在するかどうかを考察し，$n = 1$ の場合に肯定的な結果を得た．

References

[1] T. Bartsch, A generalization of the Weinstein-Moser theorems on periodic orbits of a Hamiltonian system near an equilibrium, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **14**(6), 1997, 691-718.

[2] J. Moser, Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by A. Weinstein, *Comm. Pure Appl. Math.,* **29**, 1976, pp. 727-747.

[3] A. Weinstein, Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems, *Inv. Math.,* **20**, 1973, pp. 47-57.

[4] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.