Gradient estimate for solutions to quasilinear non-degenerate Keller-Segel systems on $\mathbb{R}^N$

前田 佑輔
(東京理科大学大学院・理)

次の準線形非退化型 Keller-Segel 系の初期値問題について考える:

$$\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (f(u)\nabla u - g(u)\nabla v), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $N \geq 2$, $u_0, v_0 \geq 0$ とし, さらに u_0, v_0, f, g は次の (1), (2) を満たすとする:

(1) $\exists q > N+1\,;\ u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,q}(\mathbb{R}^N),\ \ v_0 \in H^3(\mathbb{R}^N) \cap W^{3,q}(\mathbb{R}^N)$,

(2) $f, g \in C^2([0,\infty)),\ g(0) = 0,\ f(\sigma) > 0\ (\sigma \in [0,\infty))$.

本講演では, 問題 (KS) の解 (u,v) に対する ∇u の評価, すなわち $\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ の $t \in (0,T)$ に関する一様評価について考える. ∇u の評価は, (KS) の局所的強解を大域的強解へと延長する際に非常に重要な役割を果たすが, (KS) を考える領域によって ∇u の評価を得るための方法が異なる.

有界領域の場合, u の評価が得られれば, Amann [1] の結果の応用として ∇u の評価を得ることが出来る. 一方で非有界領域の場合, [1] の結果を適用出来ないため, u の評価だけでなく ∇u の評価も方程式から直接導かなければならない. Sugiyama [2] では特に $f(u) = m(u+1)^{m-1}$ $(m \geq 1)$, $g(u) = u$ として ∇u の評価を考えているが, 証明には修正すべき点がある.

本講演の目的は, その証明を修正するとともに, 一般の f, g とした問題 (KS) に対して以下で定義する強解の ∇u の評価を得ることである (強解の存在は縮小写像の原理より示される).

定義. $\mathbb{R}^N \times [0,T)$ 上で定義された非負値関数の組 (u,v) で次の (a), (b), (c) を満たすものを $[0,T)$ 上の (KS) の**強解** ($T > 0$ を任意に選べるとき**大域的強解**) であるという:

(a) $u \in W^{1,\frac{N}{N-1}}(0,T; L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)) \cap L^{\frac{N}{N-1}}(0,T; W^{2,\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N))$,

(b) $\exists p > N+1\,;\ u, v \in W^{1,p}(0,T; L^p(\mathbb{R}^N)) \cap L^p(0,T; W^{2,p}(\mathbb{R}^N))$,

(c) u, v は, ほとんど至るところで (KS) を満たす.

主定理.

$N \geq 2$, $T > 0$ とし, u_0, v_0 は (1) を, f, g は (2) を満たすとする. (u,v) を $[0,T)$ 上の (KS) の強解とする. さらに次を仮定する:

$$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} =: M_u < \infty.$$

このとき, 次の評価が成立する:

$$\sup_{0<t<T} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M_{\nabla u}.$$

ここで $M_{\nabla u} > 0$ は, M_u, u_0, v_0, f, g, N, T に依存する定数である.

参考文献

[1] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic systems. III. Global existence*, Math. Z. **202** (1989), 219–250.

[2] Y. Sugiyama, *Time global existence and asymptotic behavior of solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis*, Differential Integral Equations **20** (2007), 133–180.