熱方程式の解に対する $M^s_{p,q}$ ノルム評価

東京理科大学大学院　理学研究科　中嶋　克臣

本研究では, 次の熱方程式の初期値問題に対して波束変換を用いて $M^s_{p,q}$ ノルム評価を行う.

$$
(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)u = 0, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

ここで $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする. $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とすると (1) の解は $u(t,\cdot) = e^{\frac{t\Delta}{2}}u_0 = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}[u_0]] \in C([0,\infty);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ となる. [2] の方法を真似て (1) の波束変換を考える.

定義 1. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し関数 φ から定まる f の波束変換 $W_\varphi f$ を次のように定義する.

$$
W_\varphi f(x,\xi) = \mathcal{F}_{y\to\xi}[\overline{\varphi(y-x)}f(y)](x,\xi).
$$

このときすべての $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し $W_\varphi f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ となる. また, 多項式増大を持つ $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対し $W_\varphi^{-1}F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\|\varphi\|_{L^2}^2}\iint \varphi(x-y)F(y,\xi)e^{ix\cdot\xi}dyd\xi$ とおくと, $W_\varphi^{-1} \cdot W_\varphi = I \ \text{ on } \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ となる.

定義 2. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ であるとする. このとき $1 \le p,q \le \infty, s \in \mathbb{R}$ に対して modulation 空間 $M^s_{p,q}$ を次のように定義する.

$$
M^s_{p,q} = \Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Big| \|f\|_{M^s_{p,q,\varphi}} := \big\| \langle\xi\rangle^s \|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L^x_p} \big\|_{L^\xi_q} < \infty \Big\}.
$$

注意 3. $M^s_{p,q}$ は窓関数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に依らずに定まる.

$\varphi_0(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ とするとき, (1) の解 $u(t,\cdot) = e^{\frac{t\Delta}{2}}u_0$ の波束変換は [2] と同様な方法により次のようになる.

$$
(2) \qquad \begin{aligned} W_{\varphi_0}[e^{\frac{t\Delta}{2}}u_0](x,\xi) &= W_{\varphi(t)}u_0(x - it\xi, \xi)e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \\ &= \frac{\exp(-\frac{t|\xi|^2 - 2itx\cdot\xi}{2(1+t)})}{(1+t)^{\frac{n}{2}}} W_{\varphi_0(\frac{x}{\sqrt{1+t}})}u_0(x, \frac{\xi}{1+t}). \end{aligned}
$$

但し, $\varphi(t,\cdot) = e^{\frac{t\Delta}{2}}\varphi_0$ である. このとき, (2) を $0 \le t \le 1, 1 \le t$ に分けて評価することで [1] で得られている評価が別の方法で得られた.

定理 4. [1] $1 \le p,q \le \infty, s \in \mathbb{R}$ を定数とし, $1 \le p',q' \le \infty$ を $p' \le p, q' \ge q$ をみたすものとする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in M^s_{p',q'}$ に対し

$$
\|e^{\frac{t\Delta}{2}}u_0\|_{M^s_{p,q,\varphi_0}} \le C(1+t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}(1 + t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q})})\|u_0\|_{M^s_{p',q',\varphi_0}} \quad (\forall\ t > 0)
$$

が成り立つ. 但し, ここで $\varphi_0(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ とする.

参考文献

[1] T. Iwabuchi, *Well-posedness of solutions for nonlinear heat equations and Navier-Stokes equations in modulation spaces*, preprint.

[2] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, *Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator*, SUT Journal of Mathematics Vol. 47, **No. 2** (2011), 175–183.