二次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式系に対する差分近似

佐々木多希子　(埼玉大学理工学研究科)

次の 2 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式系:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \alpha\Delta u = \lambda\bar{u}v, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^d, \\ i\partial_t v + \beta\Delta v = \mu u^2, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in \mathbf{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

について考察する. ただし u、v は複素数値の未知関数であり、α、β は正定数であるとし、λ、μ は複素定数であるとする. 非線形シュレディンガー方程式系 (1) は質量の異なる非相対論的粒子の運動を記述するモデルであり解の漸近挙動について研究がされている (Hayashi-Li-Ozawa[1] を参照せよ).

(1) に対する時間のみを離散化した半離散線形差分近似を構築したい. これを考察する際に、3 次の非線形項を持つ単独の非線形シュレディンガー方程式に対する既存の線形差分近似である relaxation 近似について考察する.relaxation 近似の収束証明は Besse[2] が与えたが、それにはいくつか問題があることに気が付いた. この問題を回避した新しい線形差分近似を (1) に対して構築し誤差評価を与えることが本論文の目的である.

(1) に対して次のような線形差分近似を構築した. $h > 0$ を時間の刻み幅とする. $n = 0, 1, 2, , , ,$ に対して、

$$\begin{cases} i\dfrac{u^{n+\frac{3}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}}{h} + \alpha\Delta\dfrac{u^{n+\frac{3}{2}} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} = \lambda\left(\overline{\dfrac{u^{n+\frac{3}{2}} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2}}\right)v^{n+1}, \\ i\dfrac{v^{n+1} - v^n}{h} + \beta\Delta\dfrac{v^{n+1} + v^n}{2} = \mu(u^{n+\frac{1}{2}})^2. \end{cases} \tag{2}$$

(1) の第一式を時間 $t_{n+1} = (n+1)h$ で、(1) の第二式を時間 $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})h$ でそれぞれ離散化している。

(2) に対して次の結果を得た.

命題 1　$s \in \mathbf{N}$, $s > d/2$ を仮定する。a, $b \in H^s(\mathbf{R}^d)$ とし、$R := \|a\|_{H^s} + \|b\|_{H^s}$ とする. このときある h によらない定数 T_R が存在し、$nh \leq T_R$ を満たす任意の $n \leq \mathbf{N}$ に対し

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\|_{H^s} + \|v^n\|_{H^s} \leq 2R$$

及び $(u^{\frac{1}{2}}, v^0) = (a, b)$ を満たす (2) の解 $(u^{\frac{1}{2}}, v^n)_n$ が一意的に存在する.

定理 2　$s >\in \mathbf{N}$, $s > d/2$ を仮定する. また $u_0, v_0 \in H^{s+6}$ とし, $T^* = T^*(u_0, v_0)$ を

$$(u,v) \in \bigcap_{k=0}^{3} C^k\left([0,T^*); \left(H^{s+6-k}(\mathbf{R}^d)\right)^2\right)$$

を満たすような (1) の解の最大存在時間とする．$T \in (0, T^*)$ とし，$M_0 = \max\{M, M_2, M_3\}$ とする．ただし

$$
\begin{aligned}
M &= \max_{t\in[0,T]}\{\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s}\},\\
M_k &= \max_{t\in[0,T]}\{\|\partial_t^k u(t)\|_{H^{s+6-k}} + \|\partial_t^k v(t)\|_{H^{s+6-k}}\} \quad (k=2,3)
\end{aligned}
$$

とする．さらに (2) の解 $(u^{n+\frac{1}{2}}, v^n)_n$ に初期条件

$$u^{\frac{1}{2}} = u_0 + \frac{ih}{2}(\alpha\Delta u_0 - \lambda\overline{u_0}v_0),\ v^0 = v_0$$

を課す．このとき T, M_0 のみによるある正定数 h_0, K_0 が存在し $h \in (0, h_0)$ 及び $(n+1)h \le T$ を満たす $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\|u(t_{n+\frac{1}{2}}) - u^{n+\frac{1}{2}}\|_{H^s} + \|v(t_n) - v^n\|_{H^s} \le K_0 h^2$$

が成り立つ.

本論文ではこれらの定理を紹介する.

参考文献

[1] N. Hayashi, C. Li and T. Ozawa : *Small data scattering for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Differ. Equ. Appl. **3**(2011), no.3, 415-426.

[2] C. Besse : *A relaxation scheme for the nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Numer. Anal. **42**(2004), no.3, 934-953.