ON THE FOURTH ORDER NONLINEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION ON TORUS

瀬片 純市 (東北大学大学院理学研究科)

1. 序

本講演では周期境界条件下での 4 階非線形 Schrödinger 型方程式 (4NLS) の適切性について考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \nu\partial_x^4 u = \mathcal{N}(u, \overline{u}, \partial_x u, \partial_x \overline{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \overline{u}), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここに $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2L\mathbb{Z}$ $(L > 0)$, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ は未知関数, $u_0 : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ は与えられた関数とする. 非線形項 $\mathcal{N}$ は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(u, \overline{u}, \ldots, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \overline{u}) \\ &= \ -\frac{1}{2}|u|^2 u - \frac{3}{8}\nu|u|^4 u - \frac{3}{2}\nu(\partial_x u)^2\overline{u} - \nu|\partial_x u|^2 u - \frac{1}{2}\nu u^2 \partial_x^2 \overline{u} - 2\nu|u|^2\partial_x^2 u, \end{aligned}$$

ただし, $\nu \neq 0$ は実定数とする. 方程式 $(4NLS)$ は渦糸運動の高次近似モデルとして福本-Moffatt [1] により導出された. 方程式の物理的背景については福本-Moffatt [1] を参照のこと. $(4NLS)$ は非線形 Schrödinger 方程式同様, 孤立波と呼ばれる特殊解を持つ. Hoseini-Marchant [2] は $(4NLS)$ に対し 2 つのパラメータに依存する厳密解の族 $u_{\alpha,\beta}(t,x) = e^{i\omega t}\phi_{\alpha,\beta}(x-ct)$ を見つけた:

$$\phi_{\alpha,\beta} = 2\beta e^{i\alpha x}\mathrm{sech}(\beta x), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \tag{1.2}$$

ただし, $\omega = -3\nu\alpha^4 + \nu\beta^4 - 2\nu\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2, c = -4\nu\alpha^3 + 4\nu\alpha\beta^2 + 2\alpha$. である. さらに $(4NLS)$ は次のような周期的 (周期は $2L$) な定在波も解に持つことがわかる: $u_\gamma(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\gamma(x)$,

$$\phi_\gamma(x) = 2\sqrt{\gamma}dn(\sqrt{\gamma}x, K^{-1}(L\sqrt{\gamma})), \qquad \gamma \in (\pi^2/4L^2, \infty), \tag{1.3}$$

ただし, $\omega = (K^{-1}(L\sqrt{\gamma})^4 - 6K^{-1}(L\sqrt{\gamma})^2 + 6)\nu\gamma^2 + (2 - K^{-1}(L\sqrt{\gamma})^2)\gamma$ であり, dn は Jacobi の楕円関数, $K^{-1}(k)$ は楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

の逆関数である．また $(4NLS)$ は完全可積分であり, 無限個の保存量を持つことが知られている．最初のいくつかは

$$
\begin{aligned}
I_0(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{2L} |u|^2 dx, \\
I_1(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{2L} |\partial_x u|^2 dx - \frac{1}{8}\int_0^{2L} |u|^4 dx, \\
I_2(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{2L} |\partial_x^2 u|^2 dx - \frac{1}{4} Re \int_0^{2L} \overline{u}^2 (\partial_x u)^2 dx \\
&\quad - \int_0^{2L} |u|^2 |\partial_x u|^2 dx + \frac{1}{16}\int_0^{2L} |u|^6 dx
\end{aligned}
$$

と表され, 一般には

$$
I_m(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2L} |\partial_x^m u|^2 + \int_0^{2L} Q_m(u, \overline{u}, \ldots, \partial_x^{m-1} u, \partial_x^{m-1}\overline{u}) dx,
$$

という形で表される，ここに Q_m は $(u, \overline{u}, \ldots, \partial_x^{m-1} u, \partial_x^{m-1}\overline{u})$ の多項式で，ある $\theta_1 > 0$, $0 < \theta_2 < 2$ に対し, $\int |Q| dx \le C \|u\|_{L_x^2}^{\theta_1} \|\partial_x^m u\|_{L_x^2}^{\theta_2}$ を満たすものである．これら孤立波の軌道安定性を証明するためにはまず $(4NLS)$ の Cauchy 問題や周期境界条件の下での適切性を証明する必要がある．$(4NLS)$ の Cauchy 問題については, Sobolev 空間 H^1 での時間大域的適切性が証明されている (例えば [3], [5] 参照)．さらに, $(4NLS)$ の孤立波 (1.2) の軌道安定性が [7] において証明されている．また周期境界条件下での $(4NLS)$ については [6] において $H^4(\mathbb{T})$ における時間大域的適切性が証明されている．今回は [6] の方法を精密化することで以下の定理を得た.

Theorem 1.1. *$(4NLS)$ は次の意味で $H^2(\mathbb{T})$ で時間大域的に適切である: 任意の $u_0 \in H^2(\mathbb{T})$ に対して, 時刻 $T = T(\|u_0\|_{H^2}) > 0$ が存在し, 以下を満たす (1.1) の解 u が一意に存在する:*

$$
u \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{T})) \cap L^\infty(0,\infty; H^2(\mathbb{T})) \cap C^1([0,\infty); H^{-3}(\mathbb{T})).
$$

さらに, 解写像 $H^2(\mathbb{T}) \to C([0,T]; L^2(\mathbb{T}))(u_0 \mapsto u(t))$ は連続である.

Remark 1.1. 定在波 (1.3) の $H^2(\mathbb{T})$ での軌道安定性も証明することが出来る．時間があれば (1.3) の軌道安定性について触れる予定である.

初期値問題 (1.1) の $H^2(\mathbb{T})$ での解の存在については, parabolic regularization と保存量 I_0, I_2 を用いることにより証明することが出来るのでここでは解の一意性について触れる. $(4NLS)$ は非線形項に微分を含んでいるため, 解の一意性を示す際に障害となるのが, 可微分性の損失である．実際, u_1, u_2 を $(4NLS)$ の解とし, $u_1 - u_2$ に対して, 通常のエネルギー法を用いると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_1 - u_2\|_{L^2_{per}(0,2\pi)}^2 \\
&= -2\nu \mathrm{Im}\int_0^{2L} (\overline{u}_1 + \overline{u}_2)(\partial_x \overline{u}_1 + \partial_x \overline{u}_2)(u_1 - u_2)(\partial_x u_1 - \partial_x u_2) dx \\
&\quad -\frac{1}{4}\nu \mathrm{Im}\int_0^{2L} (\overline{u}_1 + \overline{u}_2)^2 (\partial_x u_1 - \partial_x u_2)^2 dx.
\end{aligned}
$$

上の等式の右辺には $u_1 - u_2$ の1階微分が含まれているため, この等式から $u_1 - u_2$ の L^2 ノルムの評価を直接導くことが出来ない.

Cauchy 問題の場合は, 線形作用素 $i\partial_x^2 + i\nu\partial_x^4$ から生成されるユニタリー群 $\{e^{it(\partial_x^2+\nu\partial_x^4)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が局所平滑化効果を持つことが知られており, この性質を用いることにより可微分性の損失を克服することができる (例えば [5] 参照). しかしながら, 周期境界条件のもとでは対応するユニタリー群が同様の平滑化効果を持たないため, Cauchy 問題の場合と同様の方法では適切性を証明することが出来ない.

そこで周期境界条件の時は, Kwon [4] のアイデアを参考に, L^2 ノルムを修正した汎関数

$$\tilde{I}_0(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2L} |u|^2 dx - \frac{1}{16} Re \int_0^{2L} (\overline{u}_1 + \overline{u}_2)^2 (J^{-2}\partial_x u)^2 dx + C \int_0^{2L} |J^{-2}\partial_x u|^2 dx$$

を導入する, ただし J^s は $-s$ 階のベッセルポテンシャル

$$(J^s u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle_L^s \hat{u}(n) e^{n\pi i x/L}, \quad \langle n\rangle_L = \sqrt{1 + (n\pi/L)^2}$$

であり, C は $\tilde{I}_0(u) > 0$ となるように十分大きく選んでおく. $\tilde{I}_0(u_1 - u_2)$ に対して, 通常のエネルギー法を用いると, 補正項により $u_1 - u_2$ の1階微分を含む項がキャンセルし, $u_1 - u_2$ の L^2 ノルムの評価を導くことができ, 一意性を示すことが出来る. 同様にして解の初期値連続依存性を証明することができる.

References

[1] Y. Fukumoto and H. K. Moffatt, *Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part I. A higher-order asymptotic formula for the velocity*. J. Fluid. Mech. **417** (2000), 1–45.

[2] S. M. Hoseini and T. R. Marchant, *Solitary wave interaction for a higher-order nonlinear Schrödinger equation*. IMA J. Appl. Math. **72** (2007), 206-222.

[3] Z. Huo and Y. Jia, *A refined well-posedness for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation related to the vortex filament*. Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 10-12, 1493–1510.

[4] S. Kwon, *On the fifth-order KdV equation: local well-posedness and lack of uniform continuity of the solution map*, J. Differential Equations **245** (2008), 2627–2659.

[5] J. Segata, *Well-posedness and existence of standing waves for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation* Discrete Contin. Dyn. Syst. **27** no.3 (2010) 1093–1105.

[6] J. Segata, *Refined energy inequality with application to well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation on torus"* J. Differential Equations **252** no.11 (2012) 5994–6011.

[7] J. Segata, *Orbital stability of two parameter family of solitary waves for fourth order nonlinear Schrödinger type equation"* J. Math. Phys. **54** no.6 (2013) 6 pages. http://dx.doi.org/10.1063/1.4807729.