ある種の楕円型方程式の正値球対称解の一意性とその応用について

塩路直樹 (横浜国立大学)

Dirichlet 境界条件の下での楕円型方程式 $\Delta u + g(|x|)u + h(|x|)u^p = 0$ の正値球対称解の一意性についての結果を述べる。正値球対称解を扱うので、次の常微分方程式の正値解の一意性を考えることになる。

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{n-1}{r}u_r + g(r)u + h(r)u^p = 0, \ 0 < r < R, \\ u(0) \in (0, \infty), \ \ u(R) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

ただし、$R \in (0, \infty]$, $n \geq 2$, $p > 1$, $g, h \in C((0, R), \mathbb{R})$ とする。$R = \infty$ のとき、$u(R) = 0$ は $u(r) \to 0 \, (r \to \infty)$ を意味するものとする。$(*)$ は、$R = \infty$, $g(r) = -1$, $h(r) = 1$ とすればスカラー場方程式に対応する。スカラー場方程式の正値解の一意性の研究は、Coffman [1] によって始まり、Peletier-Serrin [4], McLeod-Serrin [3] らの研究の後、Kwong [2] によって完全に解決された。その後も改良は重ねられているが、いずれの証明もそれなりに難しいところがある。本講演では、$(*)$ に対し、Pohozaev の等式の一般化を与え、それを用いて正値球対称解の一意性の結果を示し、その簡明な証明を与える。その結果を、スカラー場方程式はもちろん、調和ポテンシャルを持つシュレディンガー方程式などに応用する。本講演の内容は、渡辺宏太郎氏 (防衛大学校) との共同研究 [5] に基づく。

References

[1] C. V. Coffman, *Uniqueness of the ground state solution for* $\Delta u - u + u^3 = 0$ *and a variational characterization of other solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 81–95.

[2] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.

[3] K. McLeod and J. Serrin, *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), 115–145.

[4] L. A. Peletier and J. Serrin, *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in* $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **81** (1983), 181–197.

[5] N. Shioji and K. Watanabe, *A generalized Pohožaev identity and uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$, J. Differential Equations **255** (2013), 4448–4475.