# 空間４次元で２次の非線形項をもつ波動方程式の解析*

高村博之　（公立はこだて未来大学）

この講演では、次の半線形波動方程式に対する初期値問題の古典解の最大存在時間、いわゆる lifespan $T(\varepsilon)$、が議論の対象である。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = u^2 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^4 \times [0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), u_t(x,0) = \varepsilon g(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は十分小さなパラメータで、初期値 $f, g$ は台コンパクトで十分滑らかと仮定する。この設定では $T(\varepsilon)$ は次のような評価をもつことが知られている。

$$\exp\left(c\varepsilon^{-2}\right) \le T(\varepsilon) \le \exp\left(C\varepsilon^{-2}\right). \tag{2}$$

ここで $c$ や $C$ は $\varepsilon$ に無関係で $f, g$ のみに依存する正定数である。この結果の下からの評価（長時間存在）は Li and Zhou [1]、上からの評価（有限時間爆発）は Takamura and Wakasa [2] による。これらは、半線形波動方程式に関する Strauss 予想の最終問題や非線形波動方程式に対する一般論の最適性最終問題の一部であり、長い間重要な問題と認識されてきた。このように解決までに時間を要したのは、空間４次元で２次は時間大域存在か否かを分ける臨界冪であるとともに、高次元であることから発生する基本解の微分損失によって、特殊な解析が必要とされる状況に原因があった。

ここでは、これらの結果から更に解析を進めて得られた、次の二つの定理を紹介したい。

**定理 1** (1) で $u^2$ を次の項で置き換えても (2) が成立する。

$$u(x,t)^2 - \frac{1}{\pi^2}\int_0^t d\tau \int_{|\xi|\le 1} \frac{(u_t u)(x+(t-\tau)\xi, \tau)}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi - \frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}\int_{|\xi|\le 1} \frac{f(x+t\xi)^2}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi. \tag{3}$$

**定理 2** (1) で $u^2$ を次の項で置き換えると $T(\varepsilon) = \infty$ となる。

$$u(x,t)^2 - \frac{1}{2\pi^2}\int_0^t d\tau \int_{|\omega|=1} (u_t u)(x+(t-\tau)\omega, \tau) dS_\omega - \frac{\varepsilon}{4\pi^2}\int_{|\omega|=1} (\varepsilon f^2 + \Delta f + 2\omega\cdot\nabla g)(x+t\omega) dS_\omega. \tag{4}$$

我々の最終目標は、時間大域古典解が得られるかどうかという非線形項に対する判定条件を提示することにある。この目的に対しては部分的な回答を得たことにしかならないが、その条件には高次元の微分損失による特殊性が色濃く反映されることが示唆されており、この方面の解析では先駆的な例になっていると思われる。

## 参考文献


[1] Li, T-T. and Zhou, Y., *A note on the life-span of classical solutions to nonlinear wave equations in four space dimensions*, Indiana Univ. Math. J., **44**, 1207-1248 (1995).

[2] Takamura, H. and Wakasa, K., *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations **251**, 1157-1171 (2011).



*科研費基盤 (C)(No.24540183) の支援を受けた若狭恭平氏（元未来大 M2、現北大 D1）との共同研究に基づく。