Existence and L^∞-decay property of global weak solutions to quasilinear parabolic equations with convection

竹本 憲幸
(東京理科大学大学院・理)

次の準線形放物型方程式の初期値問題に対する時間大域的弱解の存在について考える:

$$
(\mathbf{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u^m(x,t) + F(x,t)\cdot\nabla u^q(x,t) + G(x,t)u^p(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}
$$

ここで $m \geq 1,\ p,q > 1,\ N \in \mathbb{N},\ u_0 \geq 0$ とする. また $F := (f^1,\dots,f^N),\ G$ には以下を仮定する:

(1) $\quad f^i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty)),\ \ \partial_{x_i} f^i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))\ (1 \leq i \leq N),\ \ \nabla\cdot F \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$;

(2) $\quad \exists C_1 > 0,\ \exists \kappa > 1$ s.t. $|x\cdot F(x,t)| \leq C_1(|x|^2 + t^2),\ \ (x,t) \in E_\kappa$;

(3) $\quad G \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty)),\ \ G \not\equiv 0$.

ただし $E_\kappa = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\,;\ (|x|^2+t^2)^{1/2} \geq \kappa,\ t \geq 0\}$ である. まず $(\mathbf{P})$ の弱解を定義する.

定義. $T \in (0,\infty]$ とする. 次の (a), (b) をみたす u を $[0,T)$ 上の $(\mathbf{P})$ の弱解 ($T=\infty$ のとき**時間大域的弱解**) という:

(a) $u \in BC(\mathbb{R}^N \times [0,T)) := C(\mathbb{R}^N \times [0,T)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))$;
(b) u は $(\mathbf{P})$ を超関数 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ の意味でみたす.

問題 $(\mathbf{P})$ に関連する先行結果としては以下のものが知られている.
$F \equiv a\ (a \in \mathbb{R}^N),\ G \equiv 1$ (Suzuki [**1**]) : $p > m + 2/N,\ q > 1$ とする. $u_0 \in BC(\mathbb{R}^N) \cap L^{N(p-m)/2}(\mathbb{R}^N)$ に対して, $\|u_0\|_{L^{N(p-m)/2}(\mathbb{R}^N)}$ が十分小さければ, 次の評価をみたす $(\mathbf{P})$ の時間大域的弱解 u が存在する:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 t^{-1/(p-1)}, \quad t > 0.$$

ここで C_2 は正定数である. [**1**] では, $F(x,t) \equiv K(x)\ (K \in C^1(\mathbb{R}^N)^N \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)^N,\ \nabla\cdot K = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N)$, $G \equiv 1$ の場合についても同様の結果が得られると述べられている.

本研究の目的は, より一般化された $F,\ G$ に対して $(\mathbf{P})$ の時間大域的弱解の存在と時間減衰評価を得ることである. 次のような領域 D を定めることにより以下の主張が得られた.

$$p_0 := N(p-m)/2, \quad q_0 := N(q-m)/2,$$
$$D := \bigl\{(p,q) \in \mathbb{R}^2\,;\ p,q > m + 2/N,\ p_0 > q_0 - q + 1,\ q_0 > p_0 - p + 1\bigr\}.$$

主定理. $(p,q) \in D \cap \{p \geq q\}$, $\ell > (N/2+1)(p-q) + \alpha_p\ (\alpha_p := p_0 + p - 1)$, F, G には (1)–(3) を仮定する. $u_0 \in BC(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ に対して, $\|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^N)}, \|u_0\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^N)}$ が十分小さいならば, 次の時間減衰評価をみたす $(\mathbf{P})$ の時間大域的弱解 u が存在する:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\bigl(1 + t\|\nabla\cdot F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))}\bigr)^{\delta/(p-1)} t^{-1/(p-1)}, \quad t > 0.$$

ただし $C_3 > 0,\ \delta := (N/2+1)(p-q)/(\ell - \alpha_p) < 1$ である.

特に $\nabla \cdot F \equiv 0$ のとき [1] と同じ時間減衰評価が得られるので, 主定理は [1] の一般化とみなせる. また $(p,q) \in D \cap \{p < q\}$ に対しても類似した結果が得られる.

参考文献

[1] R. Suzuki, *Existence and nonexistence of global solutions to quasilinear parabolic equations with convection,* Hokkaido J. Math. **27** (1998), 147–196.