Nonlinear heat equations with constraints coupled with Navier-Stokes equations in 2D domains

都築 寛

(東京理科大学大学院・理)

$T > 0$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界を持つ有界領域とする. 次の制約付き熱方程式と Navier-Stokes 方程式を組み合わせた問題 (P) の可解性 (解の存在と一意性) を考える:

$$
\text{(P)} \begin{cases}
\psi_1 \le \theta \le \psi_2 & \text{in } Q := (0,T) \times \Omega, \\
\partial\theta/\partial t - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta = f & \text{in } Q(\theta) := \{(t,x) \in Q \mid \psi_1 < \theta < \psi_2\}, \\
\partial\theta/\partial t - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta \ge f & \text{in } Q_1(\theta) := \{(t,x) \in Q \mid \theta = \psi_1\}, \\
\partial\theta/\partial t - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta \le f & \text{in } Q_2(\theta) := \{(t,x) \in Q \mid \theta = \psi_2\}, \\
\partial\boldsymbol{v}/\partial t - \Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\theta) - \nabla p & \text{in } Q, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{in } Q, \\
\theta = 0, \ \ \boldsymbol{v} = 0 & \text{on } \Sigma := (0,T) \times \partial\Omega, \\
\theta(0,\cdot) = \theta_0(\cdot), \ \ \boldsymbol{v}(0,\cdot) = \boldsymbol{v}_0(\cdot) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで, $\theta : Q \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) : Q \to \mathbb{R}^2$, $p : Q \to \mathbb{R}$ は未知関数, ψ_1, $\psi_2 : Q \to \mathbb{R}$ $(\psi_1 \le \psi_2)$, $1 \le q < \infty$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\theta_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は既知とする.

問題 (P) で非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ がない場合の可解性は Fukao-Kubo [1] によって示されている. ただし, [1] では制約関数の有界性 $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(Q)$ という強い条件が仮定されているため, θ の制御が容易である. 一方, 本研究で扱う問題 (P) については, 非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ が追加されているため [1] の方法に追加の議論が必要である. さらに, $\psi_1, \psi_2 \notin L^\infty(Q)$ の場合については, [1] の方法を本質的に改良する必要がある. それらの問題が次の (i), (ii) として残されている:

未解決問題

(i) 非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ が追加された問題 (P) の解の存在と一意性は成立するか?

(ii) さらに, $\psi_1, \psi_2 \notin L^\infty(Q)$ の場合でも問題 (P) の解の存在と一意性は成立するか?

本研究の目的は, 上記の 2 つの未解決問題をまとめて解決することである. 実際, 以下の定理の通り, それらを完全に解決することができた.

主定理 ([2]).

次の 3 条件を仮定する:

(A1) $\psi_1, \psi_2 \in H^1(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^{2q}(Q)$, $\psi_1 \le \psi_2$ in Q, $\psi_1 \le 0 \le \psi_2$ on $\partial\Omega$;

(A2) $f \in L^2(Q)$, $\boldsymbol{g}$ は Lipschitz 連続;

(A3) $\theta_0 \in H^1_0(\Omega)$, $\psi_1(0) \le \theta_0 \le \psi_2(0)$, $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$.

このとき, 次の (C1), (C2) を満たす (P) の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する:

(C1) $\theta \in H^1(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$;

(C2) $\boldsymbol{v} \in H^1(0,T; (\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*) \cap L^\infty(0,T; \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0,T; \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))$.

ただし, $\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ はそれぞれ $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^\infty_0(\Omega) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\}$ の $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ における閉包である.

参考文献

[1] T. Fukao and M. Kubo, *Time-dependent double obstacle problem in thermohydraulics*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **Vol. 29**, pp.73–92, Gakkōtosho, Tokyo, 2008.

[2] M. Sobajima, Y. Tsuzuki and T. Yokota, *Existence and uniqueness of solutions to nonlinear heat equations with constraints coupled with Navier-Stokes equations in 2D domains*, Adv. Math. Sci. Appl., to appear.