波束変換による波面集合の特徴づけについて*

伊藤真吾† (北里大学一般教育部)

本講演では，波束変換を用いた波面集合の特徴付けについて報告する．波束変換は A. Córdoba and C. Fefferman [1] によって定義された変換で，次のように定義される．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$，$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき，ϕ からできる波束による u の波束変換 $W_\phi u(x,\xi)$ は

$$W_\phi u(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(y-x)} u(y) e^{-iy\cdot\xi} dy$$

である (この変換の詳しい性質は K. Gröchenig [4] が詳しいが，[4] ではこの変換のことを短時間フーリエ変換と呼んでいることに注意)．

波面集合を波束変換を用いて特徴付ける試みは，C^∞ 型波面集合の枠組みにおいて，G. B. Folland [2] によって始められた．波面集合は超局所的な特異性を記述する集合で，C^∞ 型波面集合 (通常，波面集合といった場合はこれを指す) は次のように定義される．$(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき，$(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$ とは，点 x_0 の近傍で 1 である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ で次を満たすものがある：

任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$C_N > 0$ が存在して，

$$|\mathcal{F}[\chi u](\xi)| \le C_N (1+|\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma.$$

G. B. Folland[2] では，点 $(x_0,\xi_0) \in WF(u)$ であるための必要十分条件を波束変換を用いて与えている．その後，T.Ōkaji [6] によって，[2] の結果を改良したものが与えられた．さらに [6] では，H^s 型波面集合の枠組みでの特徴付けにも言及しており，$(x_0,\xi_0) \in WF_{H^s}(u)$ であるための必要条件，および十分条件が与えられている．本講演の主結果は，$(x_0,\xi_0) \in WF_{H^s}(u)$ であるための必要十分条件を波束変換を用いて与えるものである．

まず，H^s 型波面集合の定義を準備する．

定義 $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．$(x_0,\xi_0) \notin WF_{H^s}(u)$ とは，点 x_0 の近傍で 1 である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して

$$\langle\xi\rangle^s |\mathcal{F}(\chi u)(\xi)| \in L^2(\Gamma)$$

を満たすことである．ただし，$\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ である．

次の定理が，今回の主結果である．

---

*本講演は加藤圭一氏（東京理科大学），小林政晴氏（山形大学）との共同研究に基づく．

†e-mail : singoito@kitasato-u.ac.jp

定理 $s \in \mathbb{R}$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき，次の (i), (ii), (iii) は同値.

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF_{H^s}(u)$

(ii) ある $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して，

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi d\lambda < \infty.$$

(iii) ある x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して，全ての $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ について，

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi d\lambda < \infty.$$

ただし，$\phi_\lambda(x) = \lambda^{n/4}\phi(\lambda^{1/2}x)$ とする.

注意 (1) P. Gérard [3] では，$\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$ のときに，上の条件の同値性が示されている.

(2) Ōkaji [6] では，$\phi \in \mathcal{S}$ がある多重指数 α について，$\int x^\alpha \phi dx$ を満たすときに (iii)$\Longrightarrow$(i) が示されている．また，ϕ の条件に加えて (iii) における λ のべきが $n-1+2s-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ の場合に (i)$\Longrightarrow$(iii) が示されている.

主定理の証明法を用いると，[6] で与えられた C^∞ 型波面集合の特徴付けの結果を改良することができる．時間があればその点についても述べたい.

References

[1] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 979–1005.

[2] G. B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Ann. of Math. Studies No.122, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1989).

[3] P. Gérard, *Moyennisation et régularité deux-microlocale*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 23 (1990), 89–121.

[4] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser Boston (2001).

[5] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Remark on characterization of wave front set by wave packet transform*, Preprint.

[6] T. Ōkaji, *A note on the wave packet transforms*, Tsukuba J. Math. 25 (2001), 383–397.