On long time behavior of small data solutions of NLS with potential

前田昌也 （千葉大理）

本講演では次のポテンシャル付き非線形 Schrödinger 方程式を考える.

$$\mathrm{i}u_t = -\Delta u + Vu + |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \tag{NLSP}$$

ただし, 次を仮定する.

- $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,
- $\sigma_p(H) = \{e_1 < e_2 < \cdots < e_n < 0\}$,
- 0 は resonance でない (i.e. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が $|u(x)| \lesssim |x|^{-1}$ かつ $Hu = 0$ を満たすならば $u = 0$).

(NLSP) の局所（と大域）適切性はよく知られている. ここでは, (NLSP) の小さな解の時間大域挙動を考察する. まず, H が固有値をもたないとき, (NLSP) の小さな解は散乱する. また, H が固有値を一つ以上もつとき, 各固有値から分岐する定在波解が存在するので, 全ての小さな解が散乱するわけではない. H が固有値をただ一つ持つとき, $(n = 1)$ のとき, Gustafson-Nakanishi-Tsai [2] は小さな解は散乱する成分と定在波解に分解されることを示した.
固有値が二つ以上あるとき $(n \geq 2)$ も, 同様に小さな解は散乱する成分と定在波解に分解されるが, このとき二つの定在波解は共存できない (準周期解は存在しない) ことが Sigal [3] によって示された. Sigal の研究は (NLSP) の時間大域挙動を追わず準周期解の非存在を示したが, その後, 固有値が二つの場合（$n = 2$）のとき, Soffer-Weinstein[4], Tsai-Yau[5] によって, 小さな解はどちらか一つの定在波解と散乱する成分に分解されることが示された. 我々は, 上の結果を $n \geq 2$ の場合に拡張した.

Theorem 0.1 (Cuccagna-M [1])**.** *$\mathbf{e} := (e_1, e_2, \cdots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ は任意の $\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ に対して, $\mathbf{e} \cdot \mu \neq 0$ をみたすとする. また, Fermi Golden Rule ([1], Section 6 参照) が成立するとする. このとき, (NLSP) の H^1 での小さな解は時間無限大で一つの定在波解と散乱する成分に分解される.*

Remark 0.2. Fermi Golden Rule は H の離散スペクトル成分と連続スペクトル成分の非線形相互作用に関する非退化条件である.

Remark 0.3. 既存の結果 [4],[5] は重み付き Sobolev 空間を初期値とする場合の小さな解を考察しているため, $n = 2$ の場合においても, 我々の結果は [4],[5] の拡張となっている.

Remark 0.4. e_1 から分岐する定在波解は基底状態解とよばれ安定である. また, $e_2, \cdots, e_n$ から分岐する定在波解は不安定であると考えられている. しかし, 我々の解析では基底状態解とそのほかの定在波解を区別することなく扱っているので, 各々の安定性は我々の結果からはわからない.

Remark 0.5. β を滑らかな実数値関数とするとき, 非線形項を $\beta(|u|^2)u$ と一般化できる. しかし, p が奇数でない場合の $|u|^{p-1}u$ のような非線形項は我々の手法では扱うことができない.

References

[1] S. Cuccagna and M. Maeda, *On small energy stabilization in the NLS with trapping potential*, preprint **arXiv:1309.0655**.

[2] Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi, and Tai-Peng Tsai, *Asymptotic stability and completeness in the energy space for nonlinear Schrödinger equations with small solitary waves*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 66, 3559–3584. MR 2101699 (2005g:35268)

[3] I. M. Sigal, *Nonlinear wave and Schrödinger equations. I. Instability of periodic and quasiperiodic solutions*, Comm. Math. Phys. **153** (1993), no. 2, 297–320. MR 1218303 (94d:35012)

[4] A. Soffer and M. I. Weinstein, *Selection of the ground state for nonlinear Schrödinger equations*, Rev. Math. Phys. **16** (2004), no. 8, 977–1071. MR 2101776 (2005g:81095)

[5] Tai-Peng Tsai and Horng-Tzer Yau, *Classification of asymptotic profiles for nonlinear Schrödinger equations with small initial data*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2002), no. 1, 107–139. MR 1992875 (2004m:35254)

Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Chiba University
E-mail Address: `maeda@math.s.chiba-u.ac.jp`