On the problem of defining a Hamiltonian on manifolds

Jun Masamune
Tohoku University, GSIS

M を連結で滑らかなリーマン多様体とし，$\Delta = \mathrm{div} \circ \nabla$ を M 上で定義されたラプラス作用素とする．コンパクトな台を持つ滑らかな関数全体がなす空間に Δ を制限すると，それはヒルベルト空間 $L^2(M)$ における対称作用素になるが，これは多様体が完備であると唯一のマルコフ拡大をもつことが M.P. Gaffney [3] により示された．さらに，本質的自己共役であることが P.R. Chernoff [4] や R.S. Strichartz [6] により示され，その後，一般の非完備多様体に拡張された [2, 5, 8, 7, 9]．

一方，シュレディンガー作用素 $L = -\Delta + V$ が本質的自己共役であるための M 上の実数値連続関数 V に関する条件も完備多様体の場合にはよく研究されている（例えば [1] を参照）．本講演では，多様体上のハーディー型不等式を示し，それを用いて L の本質的自己共役性とマルコフ性について，特に，多様体の境界や特異集合とポテンシャル V との関係について議論する．紹介する予定の結果の一部は，M. Bordoni と S. Gallot との共同研究において得られたものである．

References

[1] M. Braverman, O. Milatovich, M. Shubin, Essential selfadjointness of Schrödinger-type operators on manifolds. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002), no. 4(346), 3-58; translation in Russian Math. Surveys 57 (2002), no. 4, 641-692

[2] Y. Colin de Verdière, Pseudo-Laplaciens. 1, Ann. Inst. Fourier. 32 (1982), 275-286.

[3] M.P. Gaffney, A special Stokes' theorem for a complete Riemannian manifold. Ann. Math. 60 (1954), 140-145.

[4] P.R. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. J. Funct. Anal. 12 (1973), 401-414.

[5] S. T. Kuroda, An intoduction to scattering theory, Lecture notes series No. 51, Aarhus Univ (1978).

[6] R.S. Strichartz, Analysis of the Laplacian of a complete manifold. J. Funct. Anal. 52 (1983), 48-79.

[7] J. Masamune, Essential self-adjointness of Laplacians on Riemannian manifolds with fractal boundary. Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 3-4, 749-757.

[8] P. Li and G. Tian, On the heat kernel of the Bergmann metric on algebraic varieties, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 857-877.

[9] M. Nagase, On the heat operators of normal singular algebraic surfaces, J. Diff. Geom. 28 (1988), 37-57.