Well-posedness for a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation

林　雅行　(早稲田大学)*

$\Omega \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，ディリクレ境界条件のもとで，以下のシュレディンガー方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i|u|^{2\sigma}\partial_x u = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega, \\ u(t,x) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = \varphi(x),\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$u(t,x)$ は複素数値の未知函数であり，σ は正の定数である．微分方程式 (1) はハミルトン構造を持ち，形式的には次のようなチャージとエネルギーの保存則が成り立つ．

$$\begin{aligned} M(u(t)) &:= \int_\Omega |u|^2 dx = M(\varphi), \\ E(u(t)) &:= \int_\Omega \Big(|\partial_x u|^2 + \frac{1}{\sigma+1}\mathrm{Im}|u|^{2\sigma}\overline{u}\partial_x u \Big) dx = E(\varphi). \end{aligned}$$

$\sigma = 1$ のときは，プラズマ物理や非線形光学に現れる方程式であり，物理的にも重要であるため，多くの研究結果がある．しかし，これらは，非線形項が十分に滑らかであることを用いており，一般の σ に対しては適用できない．特に，$\sigma < 1$ のときは，非線形項が C^2 級にもならないので従来の方法による解析は困難になる．

一般の $\sigma > 0$ に対する (1) の可解性に関して，Hao [2] は，$\sigma \geq 5/2$ のとき，$H^{1/2}(\mathbb{R})$ において局所適切性を示し，Ambrose-Simpson [1] は，$\sigma \geq 1$ のとき，$H^2(\mathbb{T})$ において局所解の存在と一意性，$H^1(\mathbb{T})$ において局所解の存在を示した．また，最近，Santos [5] は，$1/2 < \sigma < 1$ のとき，重み付きのソボレフ空間 $H^{3/2}(\mathbb{R}) \cap (1+x^2)^{-1/2}H^{1/2}(\mathbb{R})$ において，$\sigma > 1$ のとき，$H^{1/2}(\mathbb{R})$ において，小さな初期値に対して局所解の存在と一意性を証明した．Liu-Simpson-Sulem [4] は σ の値に応じて，数値計算の結果も用いて，軌道安定性を議論している．ただし，[4] では，$H^1(\mathbb{R})$ における解の存在と一意性は仮定されている．

このように，一般の $\sigma > 0$ に対してはエネルギー空間 H^1 においても，まだ適切性は十分に分かっていない．本研究では，$\sigma \geq 1/2$ のとき，H^1 と H^2 における (1) の適切性を考察した．以下，主結果 ([3]) を述べる．まず，H^2 における適切性に関しては次の定理 1 が成り立つ．

定理 1. $\sigma \geq 1/2$ とする．$\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対し，$T = T(\|\varphi\|_{H^2}) > 0$ が存在し，初期値問題 (1) を満たす $u \in C([-T,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ が一意的に存在する．$\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対する (1) の解を u_n とすると，$\varphi_n \to \varphi$ in $H^2(\Omega)$ ならば $u_n \to u$ in $C([-T,T]; H^s(\Omega))$ $(0 \leq s < 2)$ が成り立つ．

エネルギー空間 H^1 における適切性に関しては，次の定理 2 と定理 3 が成り立つ．

定理 2. $\sigma \geq 1$，Ω は非有界な開区間とする．$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，$T = T(\|\varphi\|_{H^1}) > 0$ が存在して，初期値問題 (1) を満たす $u \in C([-T,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^4((-T,T); W^{1,\infty}(\Omega))$ が一意的に存在する．さらに，以下のことが成り立つ．

本研究は小澤徹教授 (早稲田大学) との共同研究に基づく．
* e-mail: masayuki-884@fuji.waseda.jp

1) $u \in L^q((-T,T);W^{1,r}(\Omega))$, $\forall(q,r)$ s.t. $0 \le 2/q = 1/2 - 1/r \le 1/2$.

2) $M(u(t)) = M(\varphi)$, $E(u(t)) = E(\varphi)$,$\forall t \in [-T,T]$.

3) $\varphi_n \in H^1_0(\Omega)$ に対する (1) の解を u_n とすると，$\varphi_n \to \varphi$ in $H^1_0(\Omega)$ ならば $u_n \to u$ in $C([-T,T];H^1_0(\Omega))$ が成り立つ．

定理 3. $\sigma \ge 1$，Ω は非有界な開区間とする．ε_0, $\varepsilon_1 > 0$ が存在して $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ が

$\sigma = 1$ のとき，$\|\varphi\|_{L^2} \le \varepsilon_0$,
$\sigma > 1$ のとき，$\|\varphi\|_{H^1} \le \varepsilon_1$

を満たすと仮定する．このとき，初期値問題 (1) を満たす $u \in C(\mathbb{R};H^1_0(\Omega)) \cap L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};W^{1,\infty}(\Omega))$ が一意的に存在する．さらに，以下のことが成り立つ．

1) $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};W^{1,r}(\Omega))$, $\forall(q,r)$ s.t. $0 \le 2/q = 1/2 - 1/r \le 1/2$.

2) $M(u(t)) = M(\varphi)$, $E(u(t)) = E(\varphi)$,$\forall t \in \mathbb{R}$.

3) $\varphi_n \in H^1_0(\Omega)$ に対する (1) の解を u_n とすると，$\varphi_n \to \varphi$ in $H^1_0(\Omega)$ ならば $u_n \to u$ in $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1_0(\Omega))$ が成り立つ．

$1/2 \le \sigma < 1$ のときは，次の定理 4 が成り立つ．

定理 4. $1/2 \le \sigma < 1$ とする．$\varphi \in H^1_0(\Omega)$ に対し，初期値問題 (1) を満たす $u \in (C_w \cap L^\infty)(\mathbb{R};H^1_0(\Omega))$ が存在する．さらに，$M(u(t)) = M(\varphi)$, $E(u(t)) \le E(\varphi)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立つ．

無条件一意性に関しては，次の定理 5 が成り立つ．

定理 5. $\sigma \ge 1/2$ とする．初期値問題 (1) において，$L^\infty((-T,T);H^{3/2}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ のクラスで一意性が成り立つ．

本講演では，適切性に関する結果（定理 1，2，3）を中心に述べる予定である．時間があれば，一意性に関しても触れたい．

参考文献

[1] D.M. Ambrose, G. Simpson, *Local existence theory for derivative nonlinear Schrödinger equations with non-integer power nonlinearities*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 2241-2264.

[2] C. Hao, *Well-posedness for one-dimensional derivative nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **6** (2007), 997-1021.

[3] M. Hayashi, T. Ozawa, *Well-posedness for a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, arXiv:1601.04167, 2016.

[4] X. Liu, G. Simpson, C. Sulem, *Stability of solitary waves for a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, J. Nonlinear Sci. **23** (2013), 557-583.

[5] G.N. Santos, *Existence and uniqueness of solution for a generalized nonlinear derivative Schrödinger equation*, J. Differential Equations **259** (2015), 2030-2060.