A propagation property for the fractional power of negative Laplacian

石田　敦英　(東京理大工)*

1. 導入

1983年，Enss [E] において，通常の自由シュレーディンガー作用素に対する次のような伝播評価が得られた．

Proposition 1.1. (Enss [E]) $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\eta > 0$ に対して $\mathrm{supp}\, f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \bigm| |\xi| \leqslant \eta\}$ をみたすものとする．$v \in \mathbb{R}^n$ を $3|v|/16 > \eta$ となるようにしておく．このとき，すべての $t \in \mathbb{R}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して，定数 $C_N > 0$ が存在して次の評価が成り立つ．

$$\|F(|x - vt| \geqslant |v||t|/4)e^{-itD_x^2/2}f(D_x - v)F(|x| \leqslant |v||t|/16)\| \leqslant C_N(1 + |v||t|)^{-N}. \quad (1.1)$$

ここで，$\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ における作用素ノルム，$F(\cdot)$ は集合 $\{\cdot\}$ の定義関数，$D_x = -i\nabla_x$ である．なお，定数 C_N は N 以外に次元 n および f の形状にも依存する．

実際は，Enss [E] では，このような球体に対してではなく，より一般的な可測集合について示されているであるが，簡単のためこのように書いた．この評価の意味を考えてみよう．D_x は古典的には粒子の運動量であり，特に今は質量が1であるから速度とも思える．評価の中で D_x は f によって v 付近に局所化されている．よってプロパゲーター $e^{-itD_x^2/2}$ の時間発展に沿って，粒子の位置 x は $x \sim D_x t \sim vt$ である．球体についても

$$\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| |x| \leqslant |v||t|/16\} \sim \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| |x - vt| \leqslant |v||t|/16\} \quad (1.2)$$

となって球の中心が vt へと移動する．つまり定義関数が互いに素なものとなって減衰が引き起こされるのである．

このエンス氏による評価 (1.1) は，1995年にヴェーダー氏との仕事 Enss-Weder [EW] によって，波動作用素を用いて定義される散乱作用素の情報から相互作用ポテンシャルの一意性を導く逆散乱問題に効果的に応用されることが分かり，以降，評価 (1.1) を用いてポテンシャルの一意性を導く手法はエンス・ヴェーダーの方法と呼ばれることとなる．実際，(1.1) は様々な系での逆散乱問題に応用された（例えばシュタルク効果の場合の Weder [W]，Nicoleau [N] や Adachi-Maehara [AM]，リパルシヴ・ハミルトニアンの場合の [I] など）．

本講演では，評価 (1.1) を分数冪ラプラシアンの場合で考察し，Enss-Weder [EW] が成功を収めたのと同様に，その評価を逆散乱問題へと応用できることについて報告したい．

2. 分数冪ラプラシアンの場合

$1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$ に対して $H_{0,\rho}$ を次のように定める．

$$H_{0,\rho} = \omega_\rho(D_x), \quad \omega_\rho(\xi) = |\xi|^{2\rho}/(2\rho) \quad (2.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 81Q10, 81U05, 81U40
キーワード：fractional Laplacian, scattering theory, inverse problem
* 〒125-8585 東京都葛飾区新宿6-3-1 東京理科大学工学部教養
e-mail: aishida@rs.tus.ac.jp

$\rho=1$のときが自由シュレーディンガー作用素$H_{0,1}=-\Delta/2$，$\rho=1/2$のときは相対論的シュレーディンガー作用素$H_{0,1/2}=\sqrt{-\Delta}$である．分数冪ラプラシアンについての散乱理論の先行研究は，上記$H_{0,\rho}$とその摂動系$H_\rho=H_{0,\rho}+V$のペアに対する波動作用素の漸近完全性を議論したKitada [K] 以外には見当たらず，今後の進展が待たれるテーマと言える．本講演での最初の主張は次の命題の形で述べられる．

Proposition 2.1. $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$はProposition 1.1と同様．$\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$は$|x|\geqslant 2$のとき$\chi(x)=1$，$|x|\leqslant 1$のとき$\chi(x)=0$をみたすものとする．$v\in\mathbb{R}^n$を$|v|\gg 1$としておく（ただし$|v|$の大きさは$\eta$のみに依存）．このとき，すべての$t\in\mathbb{R}$と$N\in\mathbb{N}$に対して，定数$C_N>0$が存在して次の評価が成り立つ．

$$\left\|\chi\left(\frac{x-(\nabla_\xi\omega_\rho)(v)t}{|v|^{2\rho-1}|t|/4}\right)e^{-itH_{0,\rho}}f(D_x-v)F(|x|\leqslant|v|^{2\rho-1}|t|/16)\right\|\leqslant C_N(|v|^{2\rho-1}|t|)^{-N}. \tag{2.2}$$

ここでも，定数C_Nは次元nおよびfの形状にも依存する．

自由シュレーディンガー作用素の場合の (1.1) のエンス氏による証明方法は，v方向へのガリレイ変換によって静止している系に帰着させ，さらに停留位相法による部分積分を繰り返すといった簡明なものであったが，分数冪ラプラシアンの場合はその分数冪の影響でガリレイ変換は叶わない．そこで，代わりに擬微分作用素の漸近展開を用いることで (2.2) を導出する．

最後に，Proposition 2.1の逆散乱問題への応用に触れておく．$V\in C^1(\mathbb{R}^n)$は$\gamma>1$に対して以下の空間遠方での減衰を持つものとする．

$$|\partial_x^\beta V(x)|\leqslant C_\beta\langle x\rangle^{-\gamma-|\beta|},\quad |\beta|\leqslant 1. \tag{2.3}$$

ここで$\langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}$である．$H_\rho=H_{0,\rho}+V$は自己共役作用素として実現され，波動作用素

$$W_\rho^\pm=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}e^{itH_\rho}e^{-itH_{0,\rho}} \tag{2.4}$$

が存在する．これらを用いて散乱作用素$S_\rho(V)=(W_\rho^+)^*W_\rho^-$が定められる．

Theorem 2.2. $1/2<\rho\leqslant 1$とする．$S_\rho(V_1)=S_\rho(V_2)$ならば$V_1=V_2$である．

参考文献

[AM] Adachi, T. and Maehara, K., On multidimensional inverse scattering for Stark Hamiltonians, *J. Math. Phys.* **48**, 042101 (2007).

[E] Enss, V., Propagation properties of quantum scattering states, *J. Funct. Anal.* **52**, 219–251 (1983).

[EW] Enss, V. and Weder, R., The geometric approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.* **36**, 3902–3921 (1995).

[I] Ishida, A., On inverse scattering problem for the Schrödinger equation with repulsive potentials, *J. Math. Phys.* **55**, 082101 (2014).

[K] Kitada, H., Scattering theory for the fractional power of negative Laplacian, *Jour. Abstr. Differ. Equ. Appl.* **1**, no.1, 1–26 (2010).

[N] Nicoleau, F., Inverse scattering for Stark Hamiltonians with short-range potentials, *Asymptotic Anal.* **35**, 349–359 (2003).

[W] Weder, R., Multidimensional inverse scattering in an electric field, *J. Funct. Anal.* **139**, 441–465 (1996).