非同次型 massless Klein-Gordon 方程式の解の量子化された場からの構成について

群馬大学 大学院理工学府
高江洲俊光

本講演では van-Hovw モデルとよばれる固定された源と相互作用する massless Klein-Gordon 場について考察する。量子場は量子力学的な粒子が生成・消滅する系を記述する。主要目的は量子化された場から、元の古典場の方程式の解を構成することである。まず初めに古典場について解説する。この系の古典場の方程式の解を $\phi_{\mathrm{cl}} = \phi_{\mathrm{cl}}(x), x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, とすると、

$$(\partial_t^2 - \triangle)\phi_{\mathrm{cl}}(x) = \rho(\mathbf{x})$$

を満たす。ただし、$\triangle = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2$ である。続いて量子化された場について考察する。通常、量子場の状態空間はフォック空間とよばれる無限直和ヒルベルト空間で与えられ、ハミルトニアンはその空間上の作用素として定義される。この系の状態空間は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソン・フォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^d)\right)$ と定義される。系の全ハミルトニアン は

$$H = H_0 + H_{\mathrm{I}},$$

で与えれられる。ここで、H_0 は掛け算作用素 $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$ の第二量子化 $H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)$ と定義され、H_{I} は $H_{\mathrm{I}} = -\left(a(f_{\mathrm{I}}) + a^\dagger(f_{\mathrm{I}})\right)$, $f_{\mathrm{I}}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}$, で与えられる。$a^\dagger(f)$ と $a(f)$ は粒子の生成作用素、消滅作用素である。

消滅作用素 $a(f)$ に関しては、形式的に $a(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{k})^* a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ となる $a(\mathbf{k})$ という作用素が定義できる。$a(\mathbf{k})$ のハイゼンベルグ描像での時間発展させた期待値を $F_{\Phi,\Psi}(t,\mathbf{k}) = (\Phi, e^{itH} a(\mathbf{k}) e^{-itH} \Psi)$ として、

$$\phi_{\mathrm{cl},\Phi,\Psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left(F_{\Phi,\Psi}(t,\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + F_{\Phi,\Psi}(t,\mathbf{k})^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) d\mathbf{k}.$$

とする。$\phi_{\mathrm{cl},\Phi,\Psi}(x)$ には紫外切断が加わってないため、well-defined であることから明らかでない。しかし、運動量空間の小さい領域と大きい領域にわけて、内積・ノルムの評価を行うと well-defined であり、$(\Phi, \Psi) = 1$ となるベクトルに関し、古典場の方程式

$$\left(\partial_t^2 - \triangle\right) \phi_{\mathrm{cl},\Phi,\Psi}(x) = \rho(\mathbf{x}),$$

を満たすことが示される。

[参考文献]

[1] 新井朝雄、「フォック空間と量子場 (上、下)」、日本評論社、(1999).

[2] J.Dereziński, Van Hove Hamiltonians - exactly solvable models of the infrared and ultraviolet problem, *Ann. Henri Poincare* 4 (2003) 713-738.

[3] T. Takaesu, Solutions of the classical field equation of a massless-Klein Gordon fied coupled to a fixed source (preprint).