二重拡散対流現象を記述する方程式系に対する全空間領域上の時間周期問題について [1]

内田　俊（早稲田大学 先進理工学部応用物理学科 助教）
E-MAIL: shunuchida@aoni.waseda.jp

1　序

以下の全空間領域 $\mathbb{R}^N$ 上における，多孔質媒質中の非圧縮性粘性流体の二重拡散対流現象を記述する方程式系 (DCBF) について考察する．

$$
\text{(DCBF)}\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{u} - \nabla p + \boldsymbol{g}T + \boldsymbol{h}C + \boldsymbol{f}_1 & \text{in } \mathbb{R}^N\times[0,S],\\
\partial_t T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \Delta T + f_2 & \text{in } \mathbb{R}^N\times[0,S],\\
\partial_t C + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = \Delta C + \rho\Delta T + f_3 & \text{in } \mathbb{R}^N\times[0,S],\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\times[0,S].
\end{cases}
$$

(DCBF) の未知関数は流速 $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \cdots, u^N)$，流体温度 T，溶質濃度 C，圧力 p である．ν, a, ρ は正定数，$\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \cdots, g^N)$, $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \cdots, h^N)$ は定ベクトル，$\boldsymbol{f}_1 = (f_1^1, f_1^2, \cdots, f_1^N)$, f_2, f_3 は既知の外力項とする．特に本講演では，方程式系 (DCBF) の時間周期問題

$$\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \boldsymbol{u}(\cdot,S),\ T(\cdot,0) = T(\cdot,S),\ C(\cdot,0) = C(\cdot,S)$$

の Large data に対する可解性について議論する．ここで $S > 0$ は時間周期を表す．

流体内に溶質が溶解し，かつ流体内の温度分布及び溶質濃度分布が空間的に非一様である場合には，浮力の効果及び温度–溶質濃度間の相互作用が要因となり，通常の拡散モデルには現れない複雑な流体現象が観測されることが知られている．この複雑な流体現象は二重拡散対流 (Double-diffusive convection) と呼ばれ，海洋学，地質学，天体物理学等の分野における現象に応用されている．その中でも多孔質媒質中の二重拡散対流は，土壌汚染モデル，触媒内の化学反応モデル等の幅広い応用例があり，工学において特に重要な研究テーマとされている．ここで二重拡散対流現象を考察する際には，多孔質媒質中の流速の挙動を記述するために Brinkman-Forchheimer 方程式と呼ばれる方程式がよく用いられる．(DCBF) の第一方程式はこの Brinkman-Forchheimer 方程式に基づくものであり，適切な物理的仮定の下で線型化されたものが採用されている.（より詳細な物理的背景及び具体例は，[3] [8] [13] 等を参照）.

流速の挙動を記述する方程式として Navier-Stokes 方程式を採用した場合の方程式系に関しては，関連する先行結果が既に数多く得られている．しかしながらこれらの研究では，Navier-Stokes 方程式に対する議論が主眼におかれており，非線型拡散項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ は移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ と同様の議論により取り扱われるため，方程式系 (DCBF) の構造，特に非線型拡散項そのものから現れる困難については十分議論されていないように思われる．実際先行研究として，３次元有界領域における (DCBF) に対し，[14] では初期値境界値問題に対する一意的時間大域解の存在が，また [11] では時間周期問題の可解性が，それぞれ Large data（初期値，外力項に小ささを課さない）の下で示されており，方程式系 (DCBF) にはより詳細な解析が可能であると考えられる．また [12] では，次元が４以下の一般領域上での初期値境界値問題に対する一意的時間大域解の存在が Large data の下で示されており，この結果は [14] の結果を空間領域が非有界の場合に拡張したと位置づけられる．

以上の先行研究を動機として我々は，時間周期解の存在についても非有界領域の場合に拡張可能であるかを精査することを本研究の目的とした．また，前述の先行研究 [11] [12] [14] における可解性が全て Large data のもとで示されていることを踏まえ，本問題でも特に,「外力項の大きさに制限を課さずに (DCBF) の時間周期解の存在を示す」ことを研究の主目的とした．

[1] 本講演は大谷光春教授（早稲田大学）との共同研究の結果に基づく

しかしながら，Large data に対する非有界領域上の時間周期問題の可解性，特に非線型拡散項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ のような非単調摂動項を持つ放物型方程式系に対する問題については，これまであまり議論されていないように思われる．

例えば，非単調摂動項を持つ放物型方程式として著名な Navier-Stokes 方程式については，非有界領域上における時間周期問題の可解性に関する結果が既にいくつか得られている（[5], [6], [15] 等を参照）．しかしながらこれらの研究における議論では，逐次近似の収束性を解の大きさが data によりコントロールされるという事実から保証しており，この意味で外力項の大きさを制限（Small data）することは本質な仮定であるように思われる．

一方で，放物型方程式の時間周期問題の Large data に対する可解性は,「劣微分作用素を主要項として持つ発展方程式」という抽象問題の枠組みで古くから考察されてきた（[1], [2], [4], [7], [9], [16] 等を参照）．例えば [9] では非単調摂動項を含む発展方程式の時間周期問題の可解性が外力項に大きさを仮定することなく示されている．しかしながら，これらの抽象理論では有界領域を想定した条件が課されており，非有界領域に対する適用は難しいと思われる．実際 [9] では Shauder 型の不動点定理を適用するために φ-levelset compactness と呼ばれる条件を仮定しているが，この条件は具体的な方程式への応用の際には通常 Rellich-Kondrachov の定理によって保証される．

このように，非有界領域における時間周期問題に対しては,「Large data」と「領域の非有界性」は一見相反する条件であるように思われる．しかしながら我々は,「有界領域で構成した解が，領域を全空間に漸近させると共に全空間での解に漸近する」という事実を示すことで (DCBF) の時間周期解の構成を行った．

2　記法，主結果

以下，Ω は全空間 $\mathbb{R}^N$ または十分滑らかな境界を持つ有界領域を表すものとする．また，$\mathbb{L}^q(\Omega) := (L^q(\Omega))^N$, $\mathbb{W}^{k,q}(\Omega) := (W^{k,q}(\Omega))^N$, $\mathbb{H}^k(\Omega) := \mathbb{W}^{k,2}(\Omega)$ （$q \in [1,\infty]$, $k \in \mathbb{N}$）とする．この時 $1 < q < \infty$ に対し，$\mathbb{L}^q(\Omega)$ は Helmholtz 分解可能，即ち，

$$\mathbb{L}^q_\sigma(\Omega) := \mathbb{C}^\infty_\sigma(\Omega) \text{ の } \mathbb{L}^q(\Omega) \text{ における閉包},$$
$$G_q(\Omega) := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{L}^q(\Omega);\ \exists p \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ \ \text{s.t.}, \boldsymbol{w} = \nabla p\},$$

により，$\mathbb{L}^q(\Omega) = \mathbb{L}^q_\sigma(\Omega) \oplus G_q(\Omega)$ とできることを想起する．但し，$\mathbb{C}^\infty_\sigma(\Omega)$ は $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ を満たす $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega) := (C^\infty_0(\Omega))^N$ 全体であるとする．

また，$q = 2$ に対して Stokes 作用素を定義する．$\mathcal{P}_\Omega$ を $\mathbb{L}^2(\Omega)$ から $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ への直交射影とし，Stokes 作用素を $\mathcal{A}_\Omega := -\mathcal{P}_\Omega\Delta$ により定義する．ここで $\mathcal{A}_\Omega$ は $D(\mathcal{A}_\Omega) := \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^1_\sigma(\Omega)$, を定義域とする $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ 上の極大単調作用素となることに注意する．但し，$\mathbb{H}^1_\sigma(\Omega)$ は $\mathbb{H}^1(\Omega)$ における $\mathbb{C}^\infty_\sigma(\Omega)$ の閉包とする．特に $\Omega = \mathbb{R}^N$ の時，$\boldsymbol{v} \in D(\mathcal{A}_{\mathbb{R}^N})$ に対し $-\Delta\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^N)$，即ち，$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^N}\boldsymbol{v} = -\Delta\boldsymbol{v}$ であることにも注意する．

指数 $q \in [1,\infty]$ に対し，q^*, q' はそれぞれ Sobolev 臨界指数及び Hölder 共役指数とする，即ち $q^* := Nq/(N-q)$, $q' := q/(q-1)$ とする．また Banach 空間 X に対し，

$$C_\pi([0,S];X) := \{U \in C([0,S];X);\ U(0) = U(S)\}$$

とする．

本講演では，次の意味での時間周期解について考察する．

定義 2.1. （解の定義）
$(\boldsymbol{u}, T, C)$ が (DCBF) の時間周期解であるとは，以下を満たすこととする：

1. $(\boldsymbol{u}, T, C)$ は以下の正則性を満たす.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in C_\pi([0,S];\mathbb{L}^{2^*}_\sigma(\mathbb{R}^N)), && T, C \in C_\pi([0,S];L^{2^*}(\mathbb{R}^N)),\\
&\partial_{x_\mu}\boldsymbol{u} \in C_\pi([0,S];\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)), && \partial_{x_\mu}T,\ \partial_{x_\mu}C \in C_\pi([0,S];L^2(\mathbb{R}^N)),\\
&\partial_{x_\iota}\partial_{x_\mu}\boldsymbol{u} \in L^2(0,S;\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)), && \partial_{x_\iota}\partial_{x_\mu}T,\ \partial_{x_\iota}\partial_{x_\mu}C \in L^2(0,S;L^2(\mathbb{R}^N)),\\
&\partial_t\boldsymbol{u} \in L^2(0,S;\mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^N)), && \partial_t T, \partial_t T \in L^2(0,S;L^2(\mathbb{R}^N)),\\
&\Delta\boldsymbol{u} \in L^2(0,S;\mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^N)) && (\forall\iota, \forall\mu = 1,2,\cdots,N).
\end{aligned}
$$

2. $(\boldsymbol{u}, T, C)$ は (DCBF) の第二，第三方程式を $L^2(0,S;L^2(\mathbb{R}^N))$ において満たす.

3. 任意の $\boldsymbol{\phi} \in L^2(0,S;\mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,S;\mathbb{L}^{(2^*)'}_\sigma(\mathbb{R}^N))$ に対して $(\boldsymbol{u}, T, C)$ は以下の方程式を満たす：
$$
\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_t\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}T - \boldsymbol{h}C - \boldsymbol{f}_1)\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt = 0.
$$

以上の定義の下，我々の主結果は以下のように記述される.

定理 2.2. 空間次元を $N = 3, 4$ とする．この時,

$$
\boldsymbol{f}_1 \in W^{1,2}(0,S;\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)),\quad \boldsymbol{f}_1(0) = \boldsymbol{f}_1(S),\quad f_2, f_3 \in L^2(0,S;L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,S;L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^N))
$$

を満たす任意の外力項に対し，(DCBF) は少なくとも一つ時間周期解 $(\boldsymbol{u}, T, C)$ を持つ.

注意 2.3. 定義 2.1 の下，(DCBF) の第一方程式は $L^2(0,S;\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)) + L^2(0,S;\mathbb{L}^{2^*}(\mathbb{R}^N))$ の意味で満たされる．但し p は，$p_1(\cdot,t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $p_2(\cdot,t) \in W^{1,2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(\forall t \in [0,S])$ かつ $\nabla p_1 \in C_\pi([0,S];\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N))$, $\nabla p_2 \in C_\pi([0,S];\mathbb{L}^{2^*}(\mathbb{R}^N))$ を満たす p_1, p_2 により，$p = p_1 + p_2$ となる.

3　証明の概略

証明は以下の通りに進める.

• **Step 1.**　$\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < n\}$（原点中心，半径 n の開球）とする．各パラメータ $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対し以下の方程式系 $(\mathrm{DCBF})_{n,\lambda}$ の時間周期問題を解く：

$$
(\mathrm{DCBF})_{n,\lambda}\begin{cases}
\partial_t\boldsymbol{u} + \nu\mathcal{A}_{\Omega_n}\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u} = \mathcal{P}_{\Omega_n}\boldsymbol{g}T + \mathcal{P}_{\Omega_n}\boldsymbol{h}C + \mathcal{P}_{\Omega_n}\boldsymbol{f}_1|_{\Omega_n} & (x,t) \in \Omega_n\times[0,S],\\
\partial_t T - \Delta T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T + \lambda T = f_2|_{\Omega_n} & (x,t) \in \Omega_n\times[0,S],\\
\partial_t C - \Delta C + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C + \lambda C = \rho\Delta T + f_3|_{\Omega_n} & (x,t) \in \Omega_n\times[0,S],\\
\boldsymbol{u} = 0,\quad T = 0,\quad C = 0 & (x,t) \in \partial\Omega_n \times [0,S].
\end{cases}
$$

但し $\cdot|_{\Omega_n}$ は，関数の Ω_n への制限を表す.

有界領域上の (DCBF) の時間周期問題は，[11] において既に Large data の下可解性が得られている．即ち，**Step 1** において我々は，$(\mathrm{DCBF})_{n,\lambda}$ に対する時間周期問題が，以下を満たす解 $(\boldsymbol{u}_n, T_n, C_n)$ を少なくとも一つ持つという事実を得る：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_n \in C_\pi([0,S];\mathbb{H}^1_\sigma(\Omega_n)) \cap L^2(0,S;\mathbb{H}^2(\Omega_n)) \cap W^{1,2}(0,S;\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega_n)),\\
&T_n, C_n \in C_\pi([0,S];H^1_0(\Omega_n)) \cap L^2(0,S;H^2(\Omega_n)) \cap W^{1,2}(0,S;L^2(\Omega_n)).
\end{aligned}
$$

• **Step 2.**　**Step 1** において得られた解 $(\boldsymbol{u}_n, T_n, C_n)$ と方程式系 $(\mathrm{DCBF})_{n,\lambda}$ の $n \to \infty$ に対する収束性を議論することにより，固定された各パラメータ $\lambda > 0$ に対する以下の方程式系 $(\mathrm{DCBF})_\lambda$ の時間周期問題の可解性を示す.

$$
(\mathrm{DCBF})_\lambda\begin{cases}
\partial_t\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^N}\boldsymbol{g}T + \mathcal{P}_{\mathbb{R}^N}\boldsymbol{h}C + \mathcal{P}_{\mathbb{R}^N}\boldsymbol{f}_1 & (x,t) \in \mathbb{R}^N\times[0,S],\\
\partial_t T - \Delta T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T + \lambda T = f_2 & (x,t) \in \mathbb{R}^N\times[0,S],\\
\partial_t C - \Delta C + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C + \lambda C = \rho\Delta T + f_3 & (x,t) \in \mathbb{R}^N\times[0,S].
\end{cases}
$$

Step 2 における収束性の議論では，[10] における「空間局所強収束性」及び「対角線論法」を用いた手法を参考とした．また，[12] 等で与えられた非線型拡散項 $\boldsymbol{u} \cdot \nabla T$, $\boldsymbol{u} \cdot \nabla C$ の評価が Scale invariant であるという事実も重要な鍵となる．結果として **Step 2** において我々は，$(\mathrm{DCBF})_\lambda$ に対する時間周期問題が，以下を満たす解 $(\boldsymbol{u}_\lambda, T_\lambda, C_\lambda)$ を少なくとも一つ持つという事実を得る：

$$\boldsymbol{u}_\lambda \in C_\pi([0,S]; \mathbb{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,S;\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N)) \cap W^{1,2}(0,S;\mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^N)),$$
$$T_\lambda, C_\lambda \in C_\pi([0,S]; H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,S;H^2(\mathbb{R}^N)) \cap W^{1,2}(0,S;L^2(\mathbb{R}^N)).$$

• **Step 3. Step 2** において得られた時間周期解 $(\boldsymbol{u}_\lambda, T_\lambda, C_\lambda)$ と方程式系 $(\mathrm{DCBF})_\lambda$ の $\lambda \to 0$ に対する収束性を議論することにより，求めるべき (DCBF) の時間周期解を構成する．

参考文献

[1] P. Bénilan and H. Brézis, Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **Vol. 22 No. 2** (1972), 311–329.

[2] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans un Espace de Hilbert*, North Holland, Amsterdam–New York, 1973.

[3] A. Brandt and H. J. S. Fernando, *Double-Diffusive Convection (Geophysical Monograph)*, Amer. Geophysical Union, 1995.

[4] H. Inoue and M. Ôtani, Periodic problems for heat convection equations in noncylindrical domains, *Funkcial. Ekvac.* **Vol. 40 No. 1** (1997), 19–39.

[5] H. Kozono and M. Nakao, Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains, *Tohoku Math. J.* **Vol. 48** (1996), 33–50.

[6] P. Maremonti, Existence and stability of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space, *Nonlinearity* **Vol. 4** (1991), 503–529.

[7] T. Nagai, Periodic solutions for certain time-dependent parabolic variational inequalities, *Hiroshima Math. J.* **Vol. 5** (1975), 537–549.

[8] D. A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Medium,* Third Edition, New York, Springer, 2006.

[9] M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associates with subdifferential operators, Periodic problems, *J. Differential Equations*, **Vol. 54 No. 2** (1984), 248–273.

[10] M. Ôtani, L^∞-energy method, basic tools and usage, *Differential Equations, chaos and variational problems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **Vol. 75** (2008), Birkhäuser, Besel, 357–376.

[11] M. Ôtani and S. Uchida, The existence of periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equations, *Adv. Math. Sci. Appl.* **Vol. 23 No. 1** (2013), 77-92.

[12] M. Ôtani and S. Uchida, The solvability of double-diffusive convection system in general domain, to appear in *Osaka J. Math.* **Vol. 53 No. 3**.

[13] T. Radko, *Double-diffusive convection*, Cambridge University Press, New York, 2013.

[14] K. Terasawa and M. Ôtani, Global solvability of double-diffusive convection systems based upon Brinkman-Forchheimer equations, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **Vol. 32** (2010), 505-515.

[15] E. J. Villamizar-Roa, M. A. Rodríguez-Bellido and M. A. Rojas-Medar, Periodic solution in unbounded domains for the Boussinesq system, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **Vol. 26, No. 5** (2010), 837–862.

[16] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, *Nagoya Math. J.* **Vol. 70** (1980), 111–123.